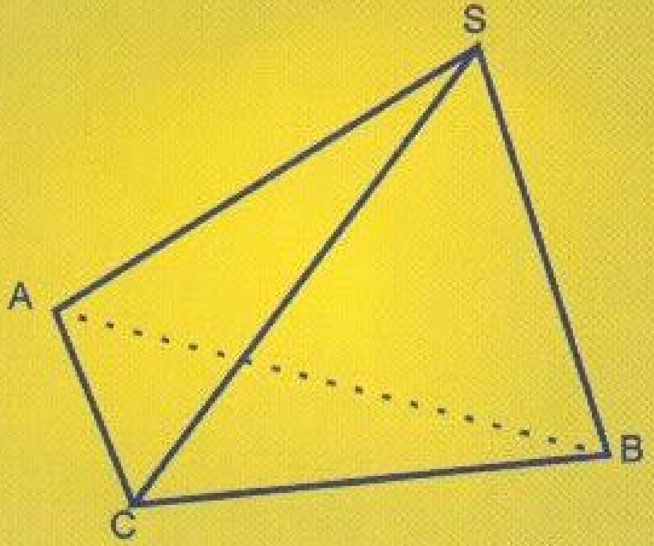
NGUYỄN VŨ THANH-TRẦN MINH CHIẾN

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11



ĐHQG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

Giải bài tập
HÌNH HỌC 11

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty sách hoa hồng

Lời nói đầu

Quyển sách ***GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11*** *này được biên soạn theo chương trình Hình học 11 hiện hành, được trình bày như sau:*

- ***Tóm tắt kiến thức.***
- ***Phương pháp giải bài tập.***
- ***Bài tập làm thêm.***

Nhằm giúp các em không có điều kiện ôn tập theo nhóm có tài liệu tham khảo ôn tập, rèn luyện hoặc để so sánh với kết quả tự ôn tập ở nhà của mình.

Quý thầy cô và quý phụ huynh xem đây như tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi xin chân thành đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

NHÓM BIÊN SOẠN

Chương I. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHÉP BIẾN HÌNH
§2. PHÉP TỊNH TIẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa phép biến hình

Quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M của mặt phẳng với một điểm xác định duy nhất M' của mặt phẳng đó được gọi là phép biến hình trong mặt phẳng.

2. Định nghĩa phép tịnh tiến

Trong mặt phẳng cho vectơ $\vec{v}$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ được gọi là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

3. Các tính chất

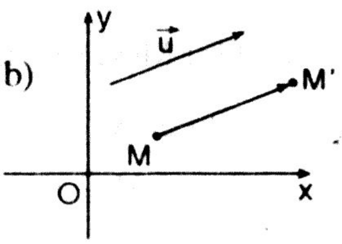
a. Tính chất 1: Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$, $T_{\vec{v}}(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$ và từ đó suy ra $M'N' = MN$.

b. Tính chất 2: Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

4. Biểu thức tọa độ

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho phép tịnh tiến theo $\vec{u} = (a; b)$

Giả sử $T_{\vec{u}}\, M(x; y) \mapsto M'(x'; y')$. Ta có: $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

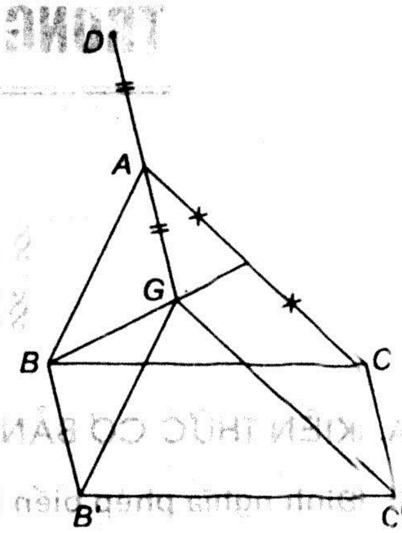
1. Chứng minh rằng: $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$.

Giải

Ta có: $M' = T_{\vec{v}}(M) \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{v} \Leftrightarrow M = T_{-\vec{v}}(M')$

2. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Xác định ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$. Xác định điểm D sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$ biến D thành A.

Giải



Dựng các hình bình hành ABB'G và ACC'G. Khi đó ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$ là tam giác GB'C'.

Dựng điểm D sao cho A là trung điểm của GD. Khi đó $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AG}$. Do đó $T_{\overrightarrow{AG}}(D) = A$.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho vectơ $\vec{v} = (-1; 2)$, hai điểm A(3; 5), B(−1; 1) và đường thẳng d có phương trình $x - 2y + 3 = 0$.

a) Tìm toạ độ của các điểm A', B' theo thứ tự là ảnh của A, B qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

b) Tìm toạ độ của điểm C sao cho A là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$.

c) Tìm phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{w}$.

Giải

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ là $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y + 2 \end{cases}$

a) Tọa độ A' là ảnh của A qua $T_{\vec{v}}$ là $\begin{cases} x_{A'} = x_A - 1 = 2 \\ y_{A'} = y_A + 2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(2; 7)$

Tương tự $T_{\vec{v}}(B) = B'(-2; 3)$

b) $A = T_{\vec{v}}(C) \Rightarrow C = T_{-\vec{v}}(A) = (4; 3)$.

c) Gọi M(x; y) thuộc d, $M' = T_{\vec{v}}(M) = (x'; y')$.

Khi đó $x' = x - 1$, $y' = y + 2$ hay $x = x' + 1$, $y = y' - 2$.

Ta có $M \in d \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x' + 1) - 2(y' - 2) + 3 = 0$

$\Leftrightarrow x' - 2y' + 8 = 0 \Leftrightarrow M' \in d'$ có phương trình $x - 2y + 8 = 0$.

Vậy d' có phương trình $x - 2y + 8 = 0$.

4. Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Hãy chỉ ra một phép tịnh tiến biến a thành b. Có bao nhiêu phép tịnh tiến như thế?

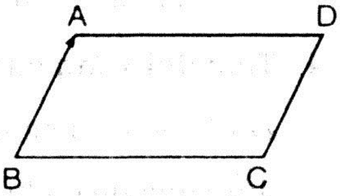
Giải

Lấy hai điểm A và B bất kì theo thứ tự thuộc a và b. Khi đó phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$ sẽ biến a thành b. Vậy có vô số phép tịnh tiến biến a thành b.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Một hình bình hành ABCD có hai đỉnh A, B cố định, còn đỉnh C thay đổi trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích đỉnh D.

Hướng dẫn



ABCD là hình bình hành nên: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$. Phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$ biến C thay đổi trên đường tròn (O) thì quỹ tích đỉnh D là đường tròn (O') ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.

2. Cho hai đường tròn (O) và (O') và hai điểm A, B. Tìm điểm M trên (O) và điểm M' trên (O') sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn

M cần tìm là giao điểm (nếu có) của (O') với đường tròn (O_1) ảnh của (O) qua phép tịnh tiến $\overrightarrow{AB}$.

3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (c) có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

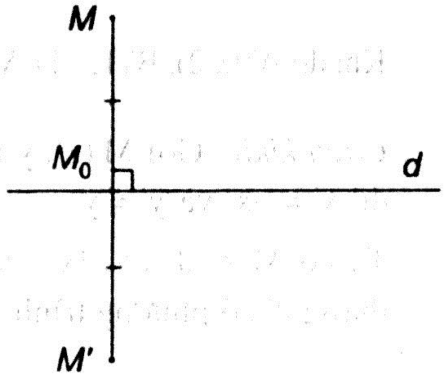
Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = (-2; 3)$.

ĐS: $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$.

§3. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa



Cho đường thẳng d. Phép biến hình biến mỗi điểm M thuộc d thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc d thành M' sao cho d là đường trung trực của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng qua đường thẳng d hay phép đối xứng trục d.

Đường thẳng d được gọi là trục của phép đối xứng trục hoặc đơn giản là trục đối xứng.

Phép đối xứng trục d thường được kí hiệu là $Đ_d$.

2. Biểu thức tọa độ

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Ox là $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

3. Các tính chất

Tính chất 1: Phép đối xứng trục bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 2: Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

4. Tâm đối xứng của một hình

Định nghĩa: Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng qua d biến $\mathcal{H}$ thành chính nó.

Khi đó ta nói $\mathcal{H}$ là hình có trục đối xứng.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A(1; −2) và B(3; 1). Tìm ảnh của A, B và đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox.

Giải

Gọi A', B' lần lượt là ảnh của A, B qua phép đối xứng trục Ox ta có: A'(1; 2), B'(3; −1).

Phương trình đường thẳng A'B' là:

$$\frac{x-1}{3-1} = \frac{y-2}{-1-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow 3x + 2y - 7 = 0.$$

Đường thẳng A'B' là ảnh của đường thẳng AB qua phép đối xứng trục Ox.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $3x - y + 2 = 0$. Viết phương trình của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy.

Giải

Lấy hai điểm A(0; 2) và B(−1; −1) thuộc d. Gọi $A' = Đ_{(Oy)}(A)$, $B' = Đ_{(Oy)}(B)$.

Khi đó A'(0; 2), B'(1; −1). Vậy d' có phương trình $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3}$, hay $3x + y - 2 = 0$.

Cách khác. Gọi M'(x'; y') là ảnh của M(x; y) qua phép đối xứng trục Oy. Khi đó $x' = -x$ và $y' = y$.

Ta có $M \in d \Leftrightarrow 3x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x' - y' + 2 = 0 \Leftrightarrow$ M' thuộc đường thẳng d' có phương trình $3x + y - 2 = 0$.

3. Trong các chữ cái sau, chữ nào là hình có trục đối xứng?

W
V I E T N A M
O

Trả lời: Các chữ cái V, I, E, T, A, M, W, O là những hình có trục đối xứng.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(\mathcal{C})$: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

Viết phương trình ảnh của $(\mathcal{C})$ qua phép đối xứng có trục Ox.

Đáp số: $(x-1)^2+(y-1)^2=4$

2. Tam giác MND gọi là nội tiếp trong tam giác ABC nếu ba đỉnh của MND nằm trên ba cạnh của tam giác ABC. Hãy tìm tam giác nội tiếp tam giác ABC cho trước sao cho nó có chu vi nhỏ nhất.

Hướng dẫn: D là chân đường cao ΔABC; M, N lần lượt là giao điểm của D_1D_2 với AB và BC (với D_1, D_2 là các điểm đối xứng của D qua AB và BC).

3. Cho tam giác ABC với trực tâm H.

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HBC, HCA có bán kính bằng nhau.

b) Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm các đường tròn nói trên. Chứng minh rằng đường tròn đi qua ba điểm O_1, O_2, O_3 bằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Hướng dẫn: Các đường tròn ngoại tiếp ΔHAB, ΔHBC, ΔHCA có bán kính bằng với đường tròn ngoại tiếp (O) của ΔABC do điểm đối xứng của H qua các cạnh ΔABC nằm trên (O).

§4. PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho điểm I. Phép biến hình biến điểm I thành chính nó, biến mỗi điểm M khác I thành M' sao cho I là trung điểm của đoạn thẳng MM' được gọi là phép đối xứng tâm I.

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ

Cho M(x; y), $M' = Đ_O(M) = (x'; y')$, khi đó $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

3. Tính chất

Tính chất 1: Nếu $Đ_I(M) = M'$ và $Đ_I(N) = N'$ thì $\overrightarrow{M'N'} = -\overrightarrow{MN}$, từ đó suy ra M'N' = MN.

Tính chất 2: Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

4. Tâm đối xứng của một hình

Định nghĩa: Điểm I được gọi là tâm đối xứng của hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng tâm I biến $\mathcal{H}$ thành chính nó.

Khi đó ta nói $\mathcal{H}$ là hình có tâm đối xứng.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(−1; 3) và đường thẳng d có phương trình x − 2y + 3 = 0. Tìm ảnh của A và d qua phép đối xứng tâm O.

Giải

Ảnh của A qua phép đối xứng tâm O là A'(1; −3).

Gọi M'(x'; y') là ảnh của M(x; y) qua phép đối xứng tâm O.

Khi đó x' = −x, y' = −y.

Ta có $M \in d \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow -x' + 2y' + 3 = 0 \Leftrightarrow x' - 2y' - 3 = 0$

$\Leftrightarrow$ M' thuộc đường thẳng d' có phương trình x − 2y − 3 = 0.

2. Trong các hình tam giác đều, hình bình hành, ngũ giác đều, lục giác đều, hình nào có tâm đối xứng?

Trả lời: Hình bình hành và lục giác đều là những hình có tâm đối xứng.

3. Tìm một hình có vô số tâm đối xứng.

Trả lời: Đường thẳng và hình gồm hai đường thẳng song song là những hình có vô số tâm đối xứng.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho góc xAy và O là một điểm trong góc đó. Hãy dựng qua O đường thẳng cắt hai cạnh Ax, Ay theo thứ tự tại M, N sao cho O là trung điểm của MN.

Hướng dẫn: Dựng điểm A' đối xứng với A qua O. Khi đó tứ giác AMA'N là hình bình hành.

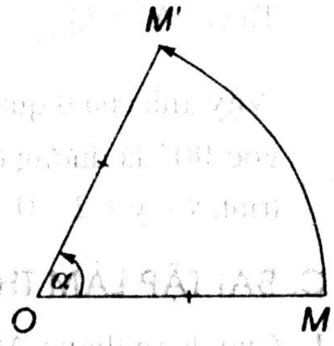
2. Dựng hình bình hành biết trung điểm ba cạnh của nó là M, N, P.

Hướng dẫn: Dựng N' là điểm đối xứng của N qua trung điểm của MP.

§5. PHÉP QUAY

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa



Cho điểm O và góc lượng giác α. Phép biến hình biến O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho OM' = OM và góc lượng giác (OM; OM') bằng α được gọi là phép quay tâm O góc α.

Điểm O được gọi là tâm quay còn α được gọi là góc quay của phép quay đó.

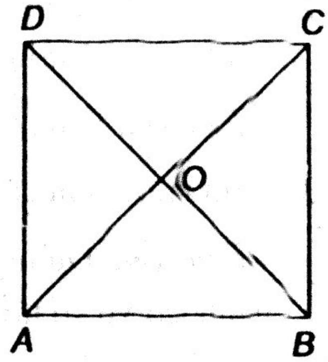
Phép quay tâm O góc α thường được kí hiệu là $Q_{(O,\alpha)}$.

2. Tính chất

Tính chất 1: Phép quay bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

Tính chất 2: Phép quay biến đường thẳng thành đường thẳng, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn cùng bán kính.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

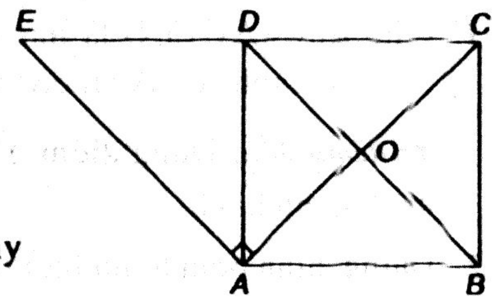


1. Cho hình vuông ABCD tâm O.

a) Tìm ảnh của điểm C qua phép quay tâm A góc 90^o.

b) Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc 90^o.

Giải



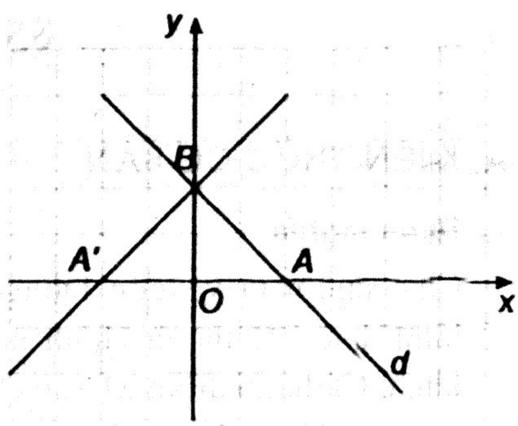
a) Gọi E là điểm đối xứng với C qua tâm D. Khi đó $Q_{(A,\,90^o)}(C) = E$.

b) $Q_{(O,\,90^o)}(B) = C$, $Q_{(O,\,90^o)}(C) = D$.

Vậy ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O góc 90^o là đường thẳng CD.

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(2; 0) và đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Tìm ảnh của A và d qua phép quay tâm O góc 90^o.

Giải



Gọi B là ảnh của A qua phép quay $Q_{(O,\,90^o)}$, ta có B(0; 2); A và B thuộc d.

Ta có: $A' = Q_{(O,\,90^o)}(B) = (-2; 0)$

Vậy ảnh của d qua phép quay tâm O góc 90^o là đường thẳng BA' có phương trình $x - y + 2 = 0$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho đoạn thẳng AC và B trên đoạn AC (B khác A và C). Về cùng một phía đối với đường thẳng AC dựng hai tam giác đều ABE và BCF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AF và CE. Chứng minh rằng tam giác BMN là tam giác đều.

Hướng dẫn: Sử dụng phép quay $Q(B, -\frac{\pi}{3})$.

2. Cho ΔABC. Dựng các hình vuông ABDE và ACFG sao cho D, C thuộc mặt phẳng đối nhau bờ AB, B và F thuộc hai mặt phẳng đối nhau bờ AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm CE và BG. Chứng minh AMN là tam giác vuông cân.

Hướng dẫn: Sử dụng phép quay $Q(A, -\frac{\pi}{2})$.

§6. KHÁI NIỆM VỀ PHÉP DỜI HÌNH VÀ HAI HÌNH BẰNG NHAU

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm về phép dời hình

Định nghĩa: Phép dời hình là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

2. Tính chất

Phép dời hình:

1) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm;

2) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;

3) Biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến góc thành góc bằng nó;

4) Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

3. Khái niệm hai hình bằng nhau

Định nghĩa: Hai hình được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

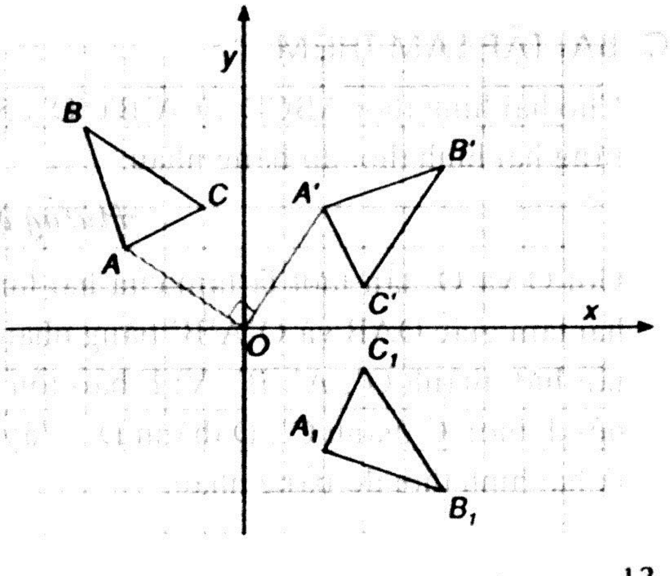
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(–3; 2), B(–4; 5) và C(–1; 3).

a) Chứng minh rằng các điểm A'(2; 3), B'(5; 4) và C'(3; 1) theo thứ tự là ảnh của A, B và C qua phép quay tâm O góc -90^o.

b) Gọi tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc -90^o và phép đối xứng qua trục Ox. Tìm toạ độ các đỉnh của tam giác $A_1B_1C_1$.

Giải



a) Ta có $\overrightarrow{OA} = (-3; 2)$, $\overrightarrow{OA'} = (2; 3)$ và $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'} = 0$, từ đó suy ra góc lượng giác $(OA; OA') = -90^o$. Mặt khác, $OA = OA' = \sqrt{13}$. Do đó phép quay tâm O góc -90^o biến A thành A'.

Tương tự $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC'} = 0$

Và OB = OB' = $\sqrt{41}$; OC = OC' = $\sqrt{10}$.

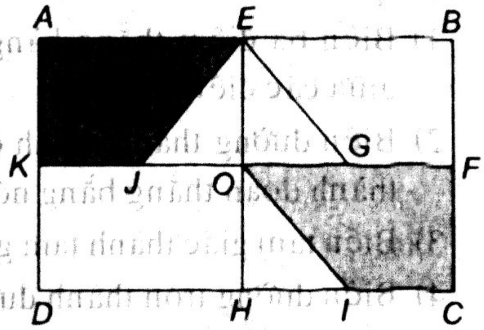
Do đó $Q_{(O,\ -90^0)}$: $B \mapsto B'$;

$C \mapsto C'$

b) Gọi tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác A'B'C' qua phép đối xứng trục Ox. Khi đó $A_1(2; -3)$, $B_1(5; -4)$, $C_1(3; -1)$.

2. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E, F, H, K, O, I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA, KF, HC, KO. Chứng minh hai hình thang AEJK và FOIC bằng nhau.

Giải



Gọi G là trung điểm của OF. Phép đối xứng qua đường thẳng EH biến hình thang AEJK thành hình thang BEGF. Phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{EO}$ biến hình thang BEGF thành hình thang FOIC. Nên hai hình thang AEJK và FOIC bằng nhau.

3. Chứng minh rằng: Nếu một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C' thì nó cũng biến trọng tâm của tam giác ABC tương ứng thành trọng tâm của tam giác A'B'C'.

Giải

Gọi phép dời hình đó là F. Do F biến các đoạn thẳng AB, BC tương ứng thành các đoạn thẳng A'B', B'C' nên nó cũng biến các trung điểm M, N của các đoạn thẳng AB, BC tương ứng theo thứ tự thành các trung điểm M', N' của các đoạn thẳng A'B', B'C'. Vậy F biến các trung tuyến AM, CN của ΔABC tương ứng thành các trung tuyến A'M', C'N' của ΔA'B'C'. Từ đó suy ra F biến trọng tâm G của ΔABC là giao của AM và CN thành trọng tâm G' của ΔA'B'C' là giao của A'M' và C'N'.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Cho hai hình thoi ABCD và A'B'C'D' có AC = A'C', BD = B'D'. Chứng minh rằng hai hình thoi đó bằng nhau.

Hướng dẫn

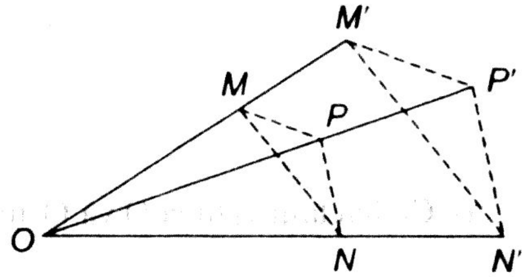
Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai hình thoi ABCD và A'B'C'D'. Rõ ràng hai tam giác OAB và O'A'B' bằng nhau nên có phép dời hình F biến O, A, B lần lượt thành O', A', B'. Vì F bảo tồn khoảng cách và thứ tự của các điểm nên F biến C thành C', D thành D'. Vậy F biến ABCD thành A'B'C'D', nghĩa là hai hình thoi đó bằng nhau.

§7. PHÉP VỊ TỰ

A KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Cho điểm O và số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{OM'} = k.\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm O, tỉ số k.



Phép vị tự tâm O, tỉ số k thường được kí hiệu là $V_{(O,k)}$.

2. Tính chất

Tính chất 1: Nếu phép vị tự tỉ số k biến hai điểm M, N tuỳ ý theo thứ tự thành M', N' thì $\overrightarrow{M'N'} = k.\overrightarrow{MN}$ và $M'N' = |k|.MN$.

Tính chất 2: Phép vị tự tỉ số k:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính $|k|R$.

3. Tâm vị tự của hai đường tròn

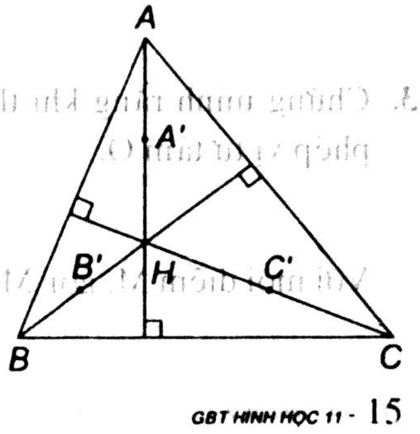
Định lí: Với hai đường tròn bất kì luôn có một phép vị tự biến đường tròn này thành đường tròn kia.

Tâm của phép vị tự đó được gọi là tâm vị tự của hai đường tròn.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và H là trực tâm. Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$.

Giải

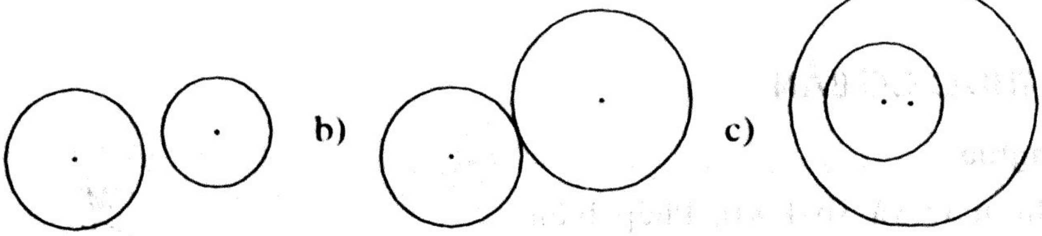


Ảnh của A, B, C qua phép vị tự $V_{\left(H,\frac{1}{2}\right)}$ lần lượt là trung điểm của các cạnh HA, HB, HC

vì $\overrightarrow{HA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$; $\overrightarrow{HB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{HC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$

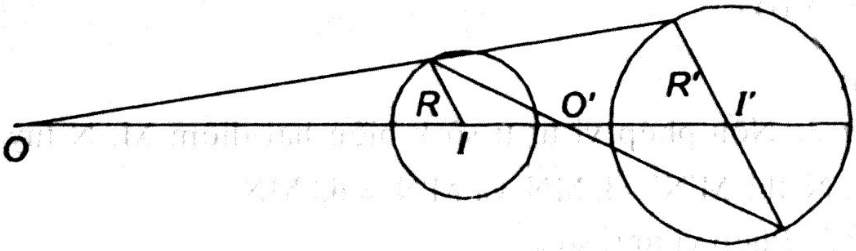
2. Tìm tâm vị tự của hai đường tròn trong các trường hợp sau

a) b) c)

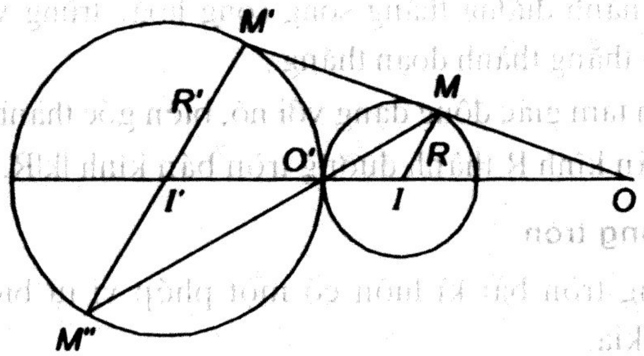


Giải

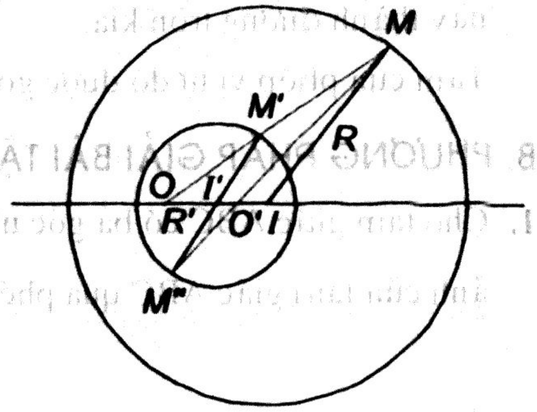
a) Có hai tâm vị tự là O và O' tương ứng với các tỉ số vị tự là $\frac{R'}{R}$ và $-\frac{R'}{R}$.



b) Có hai tâm vị tự là O và O' tương ứng với các tỉ số vị tự là $\frac{R'}{R}$ và $-\frac{R'}{R}$.



c) Có hai tâm vị tự là O và O' tương ứng với các tỉ số vị tự là $\frac{R'}{R}$ và $-\frac{R'}{R}$.



3. Chứng minh rằng khi thực hiện liên tiếp hai phép vị tự tâm O sẽ được một phép vị tự tâm O.

Giải

Với mỗi điểm M, gọi $M' = V_{(O,k)}(M)$, $M'' = V_{(O,p)}(M')$.

Khi đó $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM''} = p\overrightarrow{OM'} = pk\overrightarrow{OM}$. Từ đó suy ra $M'' = V_{(O,pk)}(M)$.

Vậy thực hiện liên tiếp hai phép vị tự $V_{(O,k)}$ và $V_{(O,p)}$ sẽ được phép vị tự $V_{(O,pk)}$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

Cho hai đường tròn (O) và (O') có bán kính khác nhau tiếp xúc ngoài với nhau với một điểm M trên (O). Dựng một đường tròn đi qua M và tiếp xúc với hai đường tròn (O) và (O').

Hướng dẫn: Xét phép vị tự V tâm I tỉ số $\frac{R'}{R}$ biến (O) thành (O') (I là giao điểm MN với OO').

§8. PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Phép biến hình F được gọi là phép đồng dạng tỉ số k (k > 0), nếu với hai điểm M, N bất kì và ảnh M', N' tương ứng của chúng ta luôn có M'N' = kMN.

2. Tính chất

Phép đồng dạng tỉ số k:

a) Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự giữa các điểm ấy.

b) Biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

c) Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với nó, biến góc thành góc bằng nó.

d) Biến đường tròn bán kính R thành đường tròn bán kính kR.

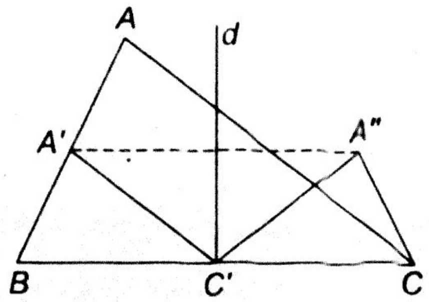
3. Hình đồng dạng

Định nghĩa: Hai hình được gọi là đồng dạng với nhau nếu có một phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho tam giác ABC. Dựng ảnh của nó qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm B tỉ số $\frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua đường trung trực của BC.

Giải

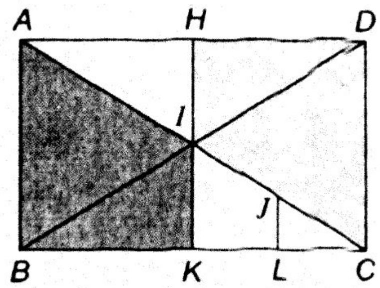


Gọi A', C' tương ứng là trung điểm của BA và BC. Phép vị tự tâm B, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến tam giác ABC thành tam giác A'BC'.

Gọi d là đường trung trực của BC, A'' là điểm đối xứng của A' qua d. Phép đối xứng qua đường trung trực của BC biến tam giác A'BC' thành tam giác A"CC'. Vậy ảnh của tam giác ABC qua phép đồng dạng đó là tam giác A"CC'.

2. Cho hình chữ nhật ABCD, AC và BD cắt nhau tại I. Gọi H, K, L và J lần lượt là trung điểm của AD, BC, KC và IC. Chứng minh hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau.

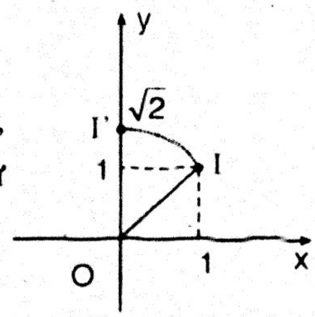
Giải



Phép đối xứng tâm I biến hình thang IHDC thành hình thang IKBA. Phép vị tự tâm C tỉ số $\frac{1}{2}$ biến hình thang IKBA thành hình thang JLKI. Do đó hai hình thang JLKI và IHDC đồng dạng với nhau.

3. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm I(1; 1) và đường tròn tâm I bán kính 2. Viết phương trình của đường tròn là ảnh của đường tròn trên qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc 45^0 và phép vị tự tâm O, tỉ số $\sqrt{2}$.

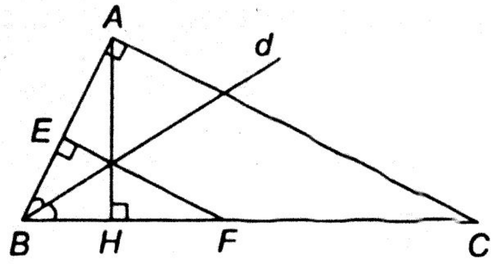
Giải



Ta có OI = $\sqrt{2}$. Gọi I' là ảnh của I qua phép quay tâm O, góc 45^0 thì I'(0; $\sqrt{2}$). Gọi I" là ảnh của I' qua phép vị tự tâm O tỉ số $\sqrt{2}$ thì I" (0; 2). Đường tròn cần tìm có tâm I" bán kính R = $2\sqrt{2}$ có phương trình là $x^2 + (y - 2)^2 = 8$.

4. Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao kẻ từ A. Tìm một phép đồng dạng biến tam giác HBA thành tam giác ABC.

Giải



Phép đối xứng qua đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ biến tam giác HBA thành tam giác EBF. Phép vị tự tâm B, tỉ số $\frac{AC}{AH}$ biến tam giác EBF thành tam giác ABC.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x = 2\sqrt{2}$. Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = \frac{1}{2}$ và phép quay tâm O góc 45^0.

2. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$. Hãy viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số $k = -2$ và phép đối xứng qua trục Ox.

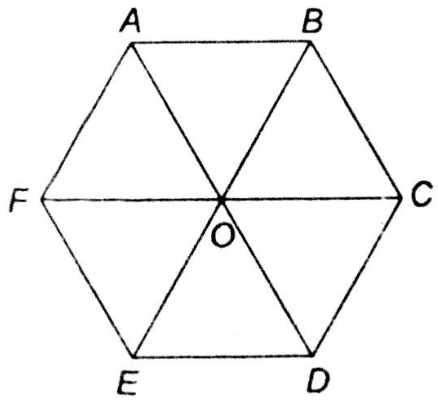
BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG I

1. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Tìm ảnh của tam giác AOF

a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AB}$;

b) Qua phép đối xứng qua đường thẳng BE;

c) Qua phép quay tâm O góc 120^0.



Giải

a) Ta có $T_{\overrightarrow{AB}}: A \mapsto B$

$O \mapsto C$

$F \mapsto O$

Suy ra $\Delta AOF \to \Delta BCO$

b) $Đ_{BE}: A \mapsto C$

$F \mapsto D$

$O \mapsto O$

$\Delta AOF \to \Delta CDO$

c) $Q_{(O,120^0)}: A \mapsto E$

$F \mapsto D$

$\Delta AOF \to \Delta EOD$

2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm A(−1; 2) và đường thẳng d có phương trình $3x + y + 1 = 0$. Tìm ảnh của A và d

a) Qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2; 1)$;

b) Qua phép đối xứng qua trục Oy;

c) Qua phép đối xứng qua gốc toạ độ;

d) Qua phép quay tâm O góc 90^0.

Giải

Gọi A' và d' lần lượt là ảnh của A và d qua các phép biến hình trên.

a) Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = (2; 1)$ là $\begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = 1 + y \end{cases}$

A(−1; 2) nên A'(1; 3),

$M(x, y) \in d \Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3(x' - 2) + (y' - 1) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x' + y' - 6 = 0 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in d'$

d' có phương trình là: $3x + y - 6 = 0$.

b) Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Oy là $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

A(−1; 2) nên A'(1, 2)

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x' + y' + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x' - y' - 1 = 0 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in d'$

d' có phương trình là $3x - y - 1 = 0$.

c) Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua gốc tọa độ 0 là: $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

A' = (−1; 2), nên A'(1; −2)

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x + y + 1 = 0 \Leftrightarrow -3x' - y' + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x' + y' - 1 = 0 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in d'$

d' có phương trình là: $3x + y - 1 = 0$.

d) Qua phép quay tâm O góc 90^0, A biến thành A'(−2; −1), B(0, −1) biến thành B'(1; 0). Vậy d' là đường thẳng A'B' có phương trình $\frac{x-1}{-3} = \frac{y}{-1}$, hay $x - 3y - 1 = 0$.

3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm I(3; −2), bán kính 3.

a) Viết phương trình của đường tròn đó.

b) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2; 1)$.

c) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép đối xứng qua trục Ox.

d) Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 3) qua phép đối xứng qua gốc toạ độ.

Giải

a) $(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

b) $T_{\vec{v}}(I) = I'(1;-1)$, phương trình đường tròn ảnh: $(x-1)^2+(y+1)^2=9$.

c) $Đ_{Ox}(I) = I'(3;2)$, phương trình đường tròn ảnh: $(x-3)^2+(y-2)^2=9$.

d) $Đ_O(I) = I'(-3;2)$, phương trình đường tròn ảnh: $(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

4. Cho vectơ $\vec{v}$, đường thẳng d vuông góc với $\vec{v}$. Gọi d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\frac{1}{2}\vec{v}$. Chứng minh rằng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là kết quả của việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua các đường thẳng d và d'.

Giải

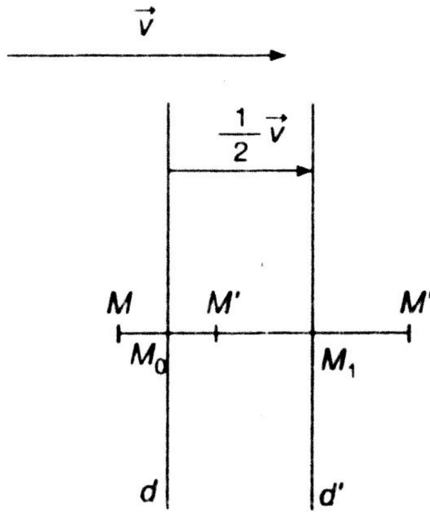
Lấy M tuỳ ý. Gọi $Đ_d(M) = M'$, $Đ_{d'}(M') = M''$. Gọi M_0, M_1 là giao điểm của d và d' với MM''.

Ta có: $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''}$

$= 2\overrightarrow{M_0M'} + 2\overrightarrow{M'M_1}$

$= 2\overrightarrow{M_0M_1} = 2\cdot\frac{1}{2}\vec{v} = \vec{v}$.

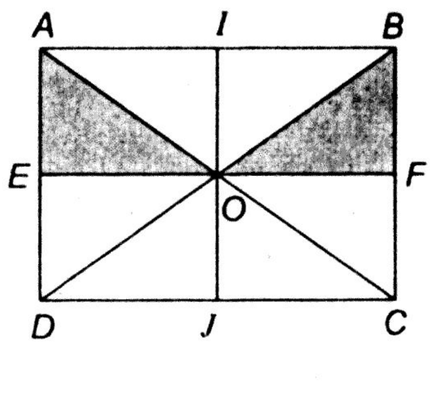
Vậy $M'' = T_{\vec{v}}(M)$ là kết quả của việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua các đường thẳng d và d'.



5. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi O là tâm đối xứng của nó. Gọi I, F, J, E lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tìm ảnh của tam giác AEO qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B, tỉ số 2.

Giải

Phép đối xứng qua đường thẳng IJ biến tam giác AEO thành tam giác BFO. Phép vị tự tâm B, tỉ số 2 biến tam giác BFO thành tam giác BCD. Vậy phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua đường thẳng IJ và phép vị tự tâm B tỉ số 2 biến tam giác AEO thành tam giác BCD.



6. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường tròn tâm I(1; −3), bán kính 2. Viết phương trình ảnh của đường tròn (I; 2) qua phép đồng dạng có được từ việc thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỉ số 3 và phép đối xứng qua trục Ox.

Giải

Gọi I' là ảnh của I qua phép vị tự $V_{(O, 3)}$ tâm O tỉ số 3.

Ta có $V_{(O, 3)}(I) = I'(3; -9)$

Gọi I'' là ảnh của I' qua phép đối xứng trục Ox.

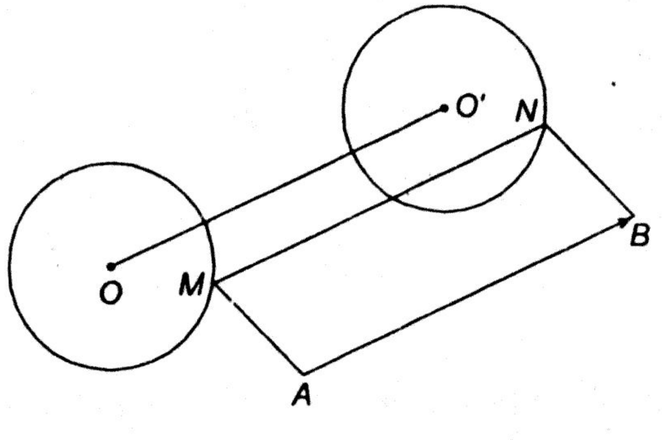
Ta có $Đ_{Ox}(I') = I''(3; 9)$.

Vậy đường tròn ảnh qua phép đồng dạng có tâm I''(3; 9) và bán kính R = 6 nên có phương trình $(x - 3)^2 + (y - 9)^2 = 36$.

7. Cho hai điểm A, B và đường tròn tâm O không có điểm chung với đường thẳng AB. Qua mỗi điểm M chạy trên đường tròn (O) dựng hình bình hành MABN. Chứng minh rằng điểm N thuộc một đường tròn xác định.

Giải

Vì $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$ không đổi, nên có thể xem N là ảnh của M qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$. Do đó khi M chạy trên đường tròn (O) thì N chạy trên đường tròn (O') là ảnh của (O) qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AB}$.



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG I

1. Trong các phép biến hình sau phép nào không phải là phép dời hình?

(A) Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng. (B) Phép đồng nhất.

(C) Phép vị tự tỉ số −1. (D) Phép đối xứng trục.

Trả lời: Phép chiếu vuông góc lên một đường thẳng không phải là phép dời hình. Chọn (A).

2. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

(A) Phép tịnh tiến biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

(B) Phép đối xứng trục biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

(C) Phép đối xứng tâm biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

(D) Phép vị tự biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó.

Trả lời: (A), (C) và (D) đúng. Chọn (B).

3 Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $2x - y + 1 = 0$. Để phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ biến d thành chính nó thì $\vec{v}$ phải là vectơ nào trong các vectơ sau?

(A) $\vec{v} = (2; 1)$;　(B) $\vec{v} = (2; -1)$;　(C) $\vec{v} = (1; 2)$;　(D) $\vec{v} = (-1; 2)$.

Trả lời: Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; 2)$. Chọn (C).

4 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $\vec{v} = (2; -1)$ và điểm $M(-3; 2)$. Ảnh của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$ là điểm có toạ độ nào trong các toạ độ sau?

(A) $(5; 3)$;　(B) $(1; 1)$;　(C) $(-1; 1)$;　(D) $(1; -1)$.

Trả lời: Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = (2, -1)$ là

$\begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = -1 + y \end{cases}$ $T_{\vec{v}} : M(-3, 2) \mapsto M'(-1; 1)$. Chọn (C).

5 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $3x - 2y + 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng trục Ox có phương trình là:

(A) $3x + 2y + 1 = 0$;　(B) $-3x + 2y + 1 = 0$;

(C) $3x + 2y - 1 = 0$;　(D) $3x - 2y + 1 = 0$.

Giải

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục Ox là $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow 3x' + 2y' + 1 = 0 \Leftrightarrow M' \in d'$

d' có phương trình: $3x + 2y + 1 = 0$. Chọn (A).

6 Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường thẳng d có phương trình: $3x - 2y - 1 = 0$. Ảnh của đường thẳng d qua phép đối xứng tâm O có phương trình là:

(A) $3x + 2y + 1 = 0$; (B) $-3x + 2y - 1 = 0$;

(C) $3x + 2y - 1 = 0$; (D) $3x - 2y - 1 = 0$.

Trả lời: Biểu thức tọa độ của phép đối xứng tâm O là $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow 3x - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow -3x' + 2y' - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 3x' - 2y' + 1 = 0 \Leftrightarrow M'(x'; y') \in d'$

d' có phương trình: $3x - 2y + 1 = 0$. Chọn (B).

7. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

(A) Có một phép tịnh tiến biến mọi điểm thành chính nó;

(B) Có một phép đối xứng trục biến mọi điểm thành chính nó;

(C) Có một phép quay biến mọi điểm thành chính nó;

(D) Có một phép vị tự biến mọi điểm thành chính nó.

Trả lời: (A), (C) và (D) đúng. Chọn (B).

8. Hình vuông có mấy trục đối xứng?

(A) 1; (B) 2; (C) 4; (D) vô số.

Trả lời: Hình vuông có 4 trục đối xứng. Chọn (C).

9. Trong các hình sau hình nào có vô số tâm đối xứng?

(A) Hai đường thẳng cắt nhau.

(B) Đường elip.

(C) Hai đường thẳng song song.

(D) Hình lục giác đều.

Trả lời: Hai đường thẳng song song có vô số tâm đối xứng. Chọn (C).

10. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

(A) Hai đường thẳng bất kì luôn đồng dạng.

(B) Hai đường tròn bất kì luôn đồng dạng.

(C) Hai hình vuông bất kì luôn đồng dạng.

(D) Hai hình chữ nhật bất kì luôn đồng dạng.

Trả lời: (A), (B) và (C) đúng. Chọn (D).

Chương II. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Các tính chất

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3: Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Tính chất 4: Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

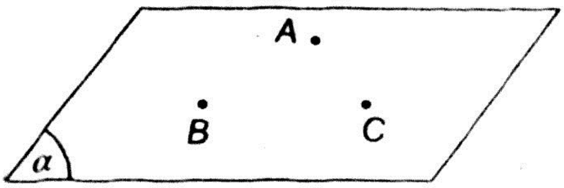
2. Cách xác định một mặt phẳng

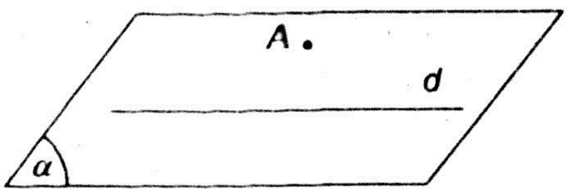
Ba cách xác định mặt phẳng

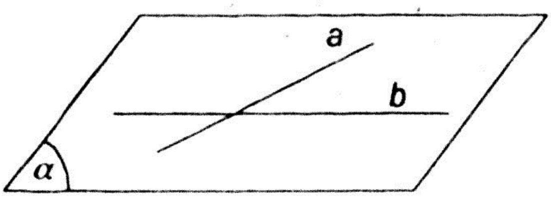
a) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.

b) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó đi qua một điểm và chứa một đường thẳng không đi qua điểm đó.

c) Mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.





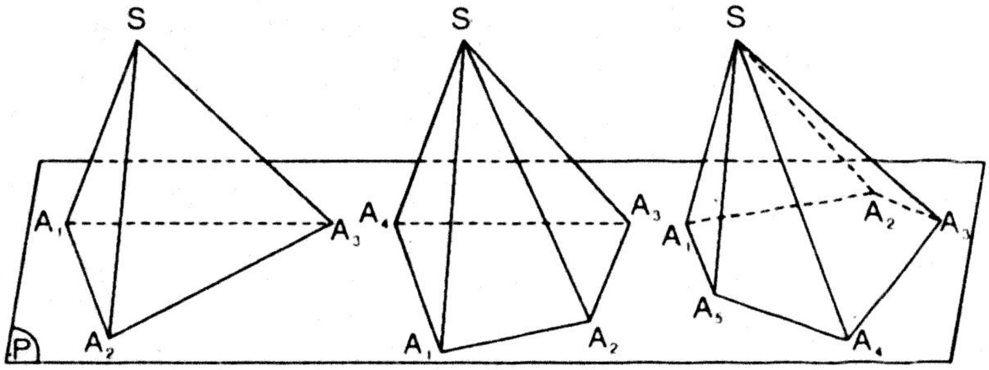


3. Hình chóp và hình tứ diện

a) Hình chóp

Định nghĩa: Cho đa giác lồi $A_1A_2 \dots A_n$ và điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_n$ để được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_nA_1$.

Hình gồm n đa giác đó và đa giác $A_1A_2 \dots A_n$ gọi là hình chóp và được kí hiệu là $S.A_1A_2 \dots A_n$.



b) Hình tứ diện

Định nghĩa: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD gọi là hình tứ diện (hay ngắn gọn là tứ diện) và được kí hiệu là ABCD. Thiết diện (hay mặt cắt) của hình $\mathcal{H}$ khi cắt bởi mp(P) là phần chung của mp(P) và hình $\mathcal{H}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E, F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB, AC.

a) Chứng minh đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng (ABC).

b) Khi EF và BC cắt nhau tại I, chứng minh I là điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (DEF).

Giải

a) Ta có: $E \in AB$ nên $E \in (ABC)$

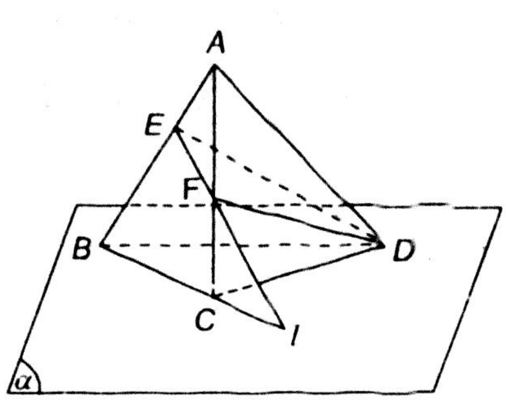
$F \in AC$ nên $F \in (ABC)$.

Suy ra EF nằm trong (ABC).

b) $I \in BC \Rightarrow I \in (BCD)$.

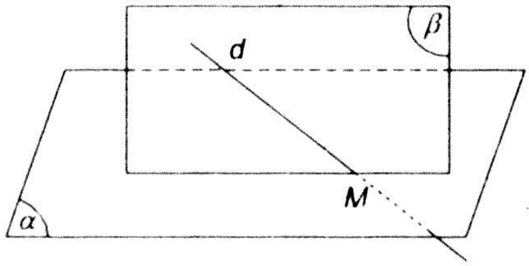
$I \in EF \Rightarrow I \in (DEF)$.

Vậy $I \in (BCD) \cap (DEF)$.



2. Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α). Chứng minh M là điểm chung của (α) với một mặt phẳng bất kì chứa d.

Giải



Hiển nhiên $M \in (\alpha)$. Gọi (β) là mặt phẳng bất kì chứa d, ta có

$$\begin{cases} M \in d \\ d \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow M \in (\beta).$$

Vậy M là điểm chung của (α) và mọi mặt phẳng (β) chứa d.

3. Cho ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 không cùng nằm trong một mặt phẳng và cắt nhau từng đôi một. Chứng minh ba đường thẳng trên đồng quy.

Giải

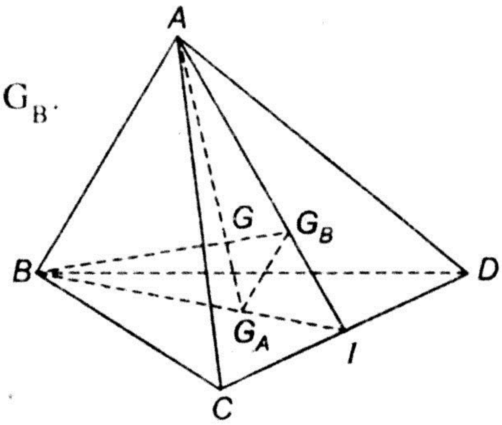
Giả sử $I = d_1 \cap d_2$. Ta chứng minh $I \in d_3$.

Nếu d_3 không đi qua I thì d_3 cắt d_1 và d_2 lần lượt tại J và K (khác I).

I, J, K không thẳng hàng nên tạo thành mặt phẳng (IJK). Khi đó d_1, d_2, d_3 nằm trong (IJK) (vô lí). Vậy d_3 đi qua I tức d_1, d_2, d_3 đồng quy.

4. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi G_A, G_B, G_C, G_D lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, ABD, ABC. Chứng minh rằng AG_A, BG_B, CG_C, DG_D đồng quy.

Giải



Gọi I là trung điểm của CD.

Ta có: $G_A \in BI$, $G_B \in AI$. Gọi $G = AG_A \cap BG_B$.

Ta có: $\Delta IG_AG_B \backsim \Delta IBA$

vì $\dfrac{IG_A}{IB} = \dfrac{IG_B}{IA} = \dfrac{1}{3}$ nên $G_AG_B \parallel AB$

và $\dfrac{GA}{GG_A} = \dfrac{AB}{G_AG_B} = 3.$

Lí luận tương tự, ta có CG_C, DG_D cũng cắt AG_A tại G', G''

và $\dfrac{G'A}{G'G_A} = 3$, $\dfrac{G''A}{G''G_A} = 3.$

Như vậy $G \equiv G' \equiv G''$

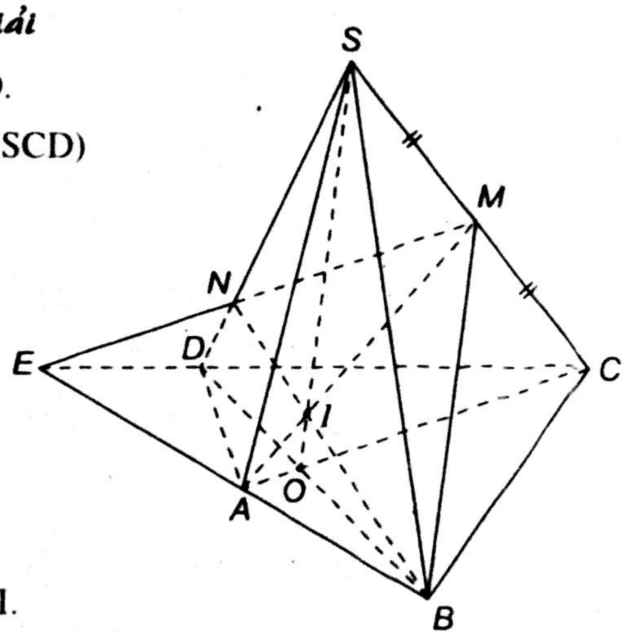
Ghi chú: Ta gọi AG_A, BG_B, CG_C và DG_D là các đường trung tuyến và G là trọng tâm của tứ diện ABCD.

5. Cho tứ giác ABCD nằm trong mặt phẳng (α) có hai cạnh AB và CD không song song. Gọi S là điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) và M là trung điểm đoạn SC.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng SD và mặt phẳng (MAB).

b) Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

Giải



a) Gọi E là giao điểm của AB và CD.

Chọn mặt phẳng phụ chứa SD là (SCD)

(MAB) $\cap$ (SCD) = ME.

Gọi N là giao điểm ME với SD thì N là giao điểm của SD với mp(MAB).

b) Gọi $I = AM \cap BN$.

$AM \subset (SAC)$; $BN \subset (SBD)$

$\Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) = SO$.

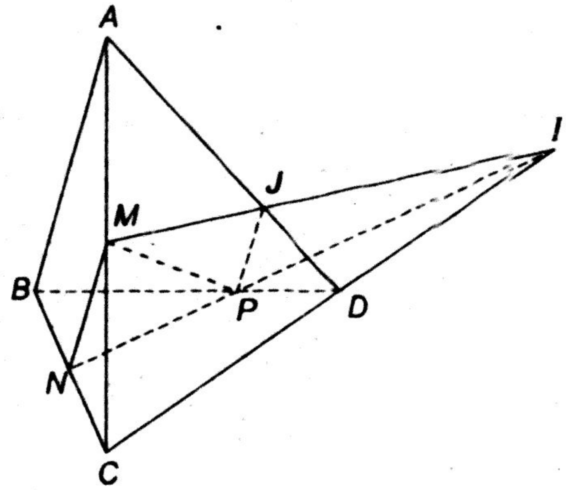
Vậy AM, BN và SO đồng quy tại I.

6. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho BP = 2PD.

a) Tìm giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

Giải



a) Giao điểm của CD với mp(MNP)

Ta có NP không là đường trung bình của tam giác BCD nên NP cắt CD tại I.

$I \in CD$ và $I \in (MNP)$

nên $\{I\} = CD \cap (MNP)$

b) Giao tuyến của (MNP) và (ACD)

Ta có M và I là hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) nên: $(MNP) \cap (ACD) = MI$

7. Cho bốn điểm A, B, C và D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi M và N là hai điểm lần lượt lấy trên hai đoạn thẳng AB và AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

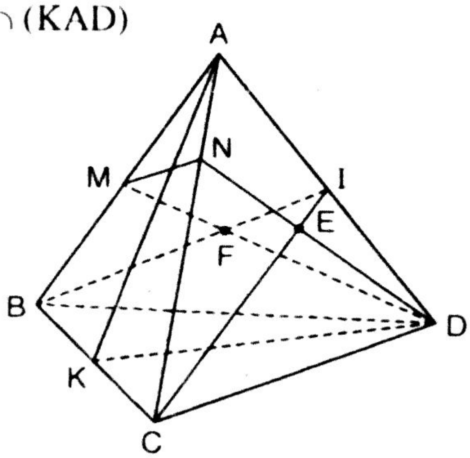
Giải

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng(IBC) và (KAD).

Ta có $I \in AD \Rightarrow I \in (KAD) \Rightarrow I \in (KAD) \cap (IBC)$

$K \in BC \Rightarrow K \in (IBC) \Rightarrow K \in (IBC) \cap (KAD)$

Vậy $(IBC) \cap (KAD) = IK$.



b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

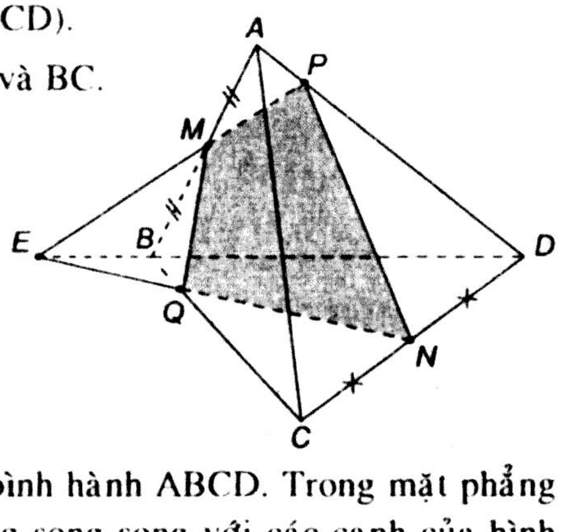
Trong mp(ACD) gọi $\{E\} = CI \cap DN$ và trong mp(ABD) gọi $\{F\} = BI \cap DM$.

E, F là hai điểm chung phân biệt của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN) nên $(IBC) \cap (DMN) = EF$.

8. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, trên cạnh AD lấy điểm P không trùng với trung điểm của AD.

a) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MP và đường thẳng BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (PMN) và (BCD).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (PMN) và BC.



Giải

a) Ta có $E, N \in (MNP) \cap (BCD)$

$\Rightarrow (MNP) \cap (BCD) = EN$.

b) Gọi Q là giao điểm của NE và BC thì Q là giao điểm của (PMN) và BC.

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Trong mặt phẳng đáy vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành, d cắt đoạn BC tại E. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC.

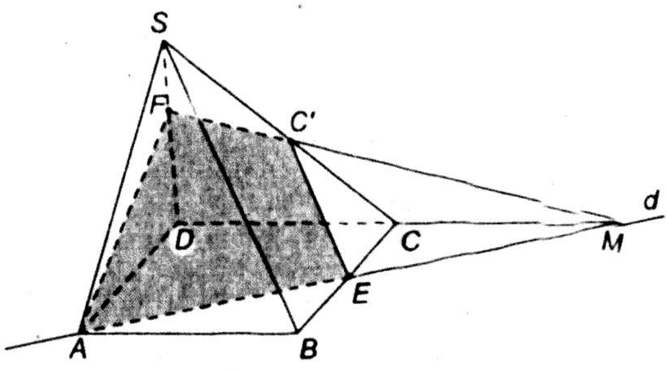
a) Tìm giao điểm M của CD và mặt phẳng (C'AE).

b) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (C'AE).

Giải

a) Gọi M là giao điểm của AE và DC thì M là giao điểm của CD và (C'AE).

b) Gọi F là giao điểm của MC' với SD. Thiết diện cần tìm là tứ giác AEC'F.



10. Cho hình chóp S.ABCD có AB và CD không song song. Gọi M là một điểm thuộc miền trong của tam giác SCD.

a) Tìm giao điểm N của đường thẳng CD và mặt phẳng (SBM).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SBM) và (SAC).

c) Tìm giao điểm I của đường thẳng BM và mặt phẳng (SAC).

d) Tìm giao điểm P của SC và mặt phẳng (ABM), từ đó suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (SCD) và (ABM).

Giải

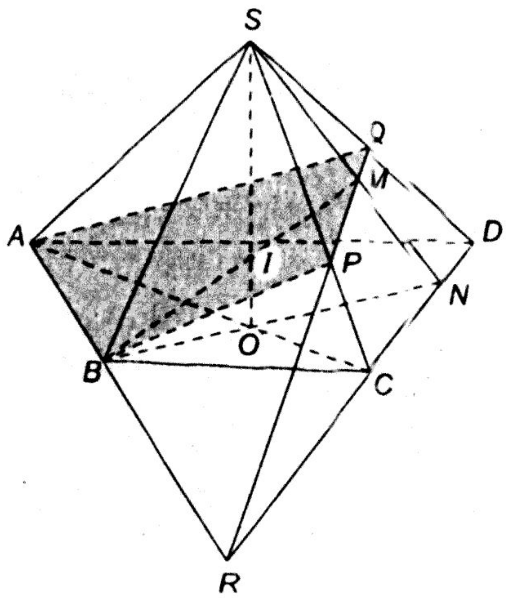
a) Gọi N là giao điểm của SM và CD thì N là giao điểm của CD và mp(SBM).

b) Gọi O = AC ∩ BN thì ta có:

(SBM) ∩ (SAC) = SO.

c) Gọi I = SO ∩ BM thì I là giao điểm của BM với mặt phẳng (SAC).

d) Gọi R = AB ∩ CD, P = MR ∩ SC thì P là giao điểm của SC với mp(ABM) và (SCD) ∩ (AMB) = PM.



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là một điểm trên cạnh BD sao cho KD < KB. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IJK) với hai mặt phẳng (ACD) và (ABD).

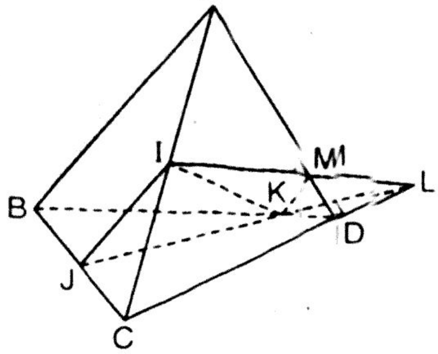
Hướng dẫn

a) Gọi làm là giao điểm của JK và CD.

Ta có: (IJK) ∩ (ACD) = IL

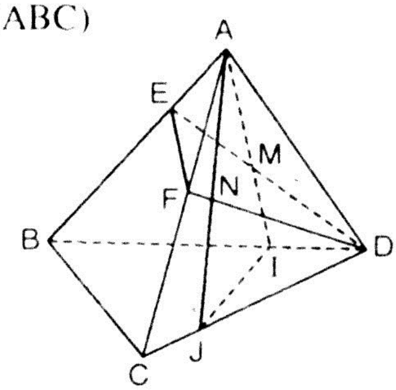
b) Gọi M là giao điểm của AD và IL.

Ta có: (IJK) ∩ (ABD) = KM



2. Cho tứ diện ABCD, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng.

a) (AMN) và (BCD); b) (DMN) và (ABC)



Hướng dẫn

a) Giao tuyến của (AMN) và (BCD)

Gọi I là giao điểm của AM và BD.

J là giao điểm của AN và CD.

Ta có: (AMN) $\cap$ (BCD) = IJ

b) Giao tuyến của (DMN) và (ABC)

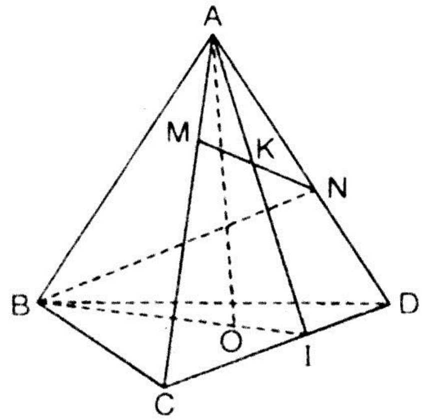
Gọi E là giao điểm của DM và AB, F là giao điểm của DN và AC.

Ta có: (DMN) $\cap$ (ABC) = EF

3. Cho tứ diện ABCD, M và N là hai điểm lần lượt trên AC và AD. O là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao điểm của:

a) MN và (ABO); b) AO và (BMN)

Hướng dẫn



a) Tìm giao điểm MN và (ABO)

Chọn mặt phẳng phụ chứa MN là (ACD)

(ACD) $\cap$ (ABO) = AI với I là giao điểm của 2 đường thẳng BO và CD.

Gọi K là giao điểm của AI và MN thì K là giao điểm của MN và (ABO)

b) Tìm giao điểm AO và (BMN)

Chọn mặt phẳng phụ chứa AO là (ABI)

(ABI) $\cap$ (BMN) = BK

Gọi L là giao điểm của BK và AO thì L là giao điểm của AO và (BMN)

4. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, đáy lớn là AB. Gọi I, J, K là 3 điểm trên SA, AB, BC theo thứ tự đó.

a) Tìm giao điểm IK với (SBD)

b) Tìm các giao điểm của mp(IJK) với SD và SC.

Hướng dẫn

a) Tìm giao điểm IK và (SBD)

Cho mặt phẳng phụ chứa IK là (SKA).

(SKA) $\cap$ (SBD) = SO với O là giao điểm của AK và BD

Gọi M là giao điểm của SO và IK thì

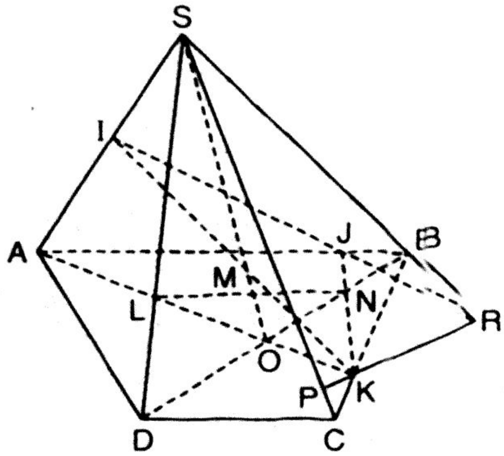
M là giao điểm của IK và (SBD)

b) Tìm giao điểm SD và (IJK)

Chọn mặt phẳng phụ chứa SD là (SBD)

(SBD) ∩ (IJK) = MN với N là giao điểm của JK và BD

Gọi L là giao điểm của MN và SD thì L là giao điểm của SD và (IJK)



c) Chọn giao điểm SC và (IJK)

Chọn mặt phẳng phụ thuộc chứa SC là (SBC).

(SBC) ∩ (IJK) = KR với R là giao điểm của 2 đường thẳng IJ và SB.

Gọi P là giao điểm của KR và SC thì P là giao điểm của SC và (IJK).

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

a) Trường hợp 1. Có một mặt phẳng chứa a và b, ta nói a và b là đồng phẳng. Có ba khả năng sau: * a và b cắt nhau tại M

* a song song với b

* a trùng với b

b) Trường hợp 2. a và b chéo nhau.

2. Tính chất

a) Định lí 1: Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

b) Định lí 2 (Về giao tuyến của ba mặt phẳng)

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

c) Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

d) Định lí 3: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

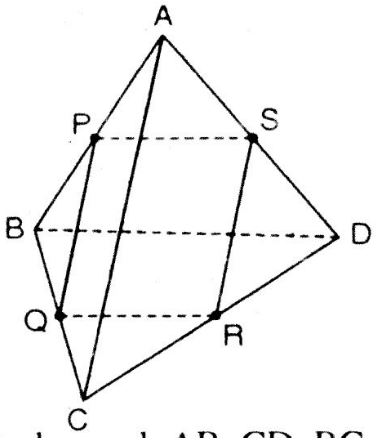
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi P, Q, R và S là bốn điểm lần lượt lấy trên bốn cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng nếu bốn điểm P, Q, R và S đồng phẳng thì

   a) Ba đường thẳng PQ, SR và AC hoặc song song hoặc đồng quy;

   b) Ba đường thẳng PS, RQ và BD hoặc song song hoặc đồng quy.

Giải



a) Gọi (α) là mặt phẳng chứa P, Q, R và S. Ba mặt phẳng (α), (DAC), (BAC) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là SR, PQ và AC. Như vậy SR, QP và AC hoặc đôi một song song hoặc đồng quy.

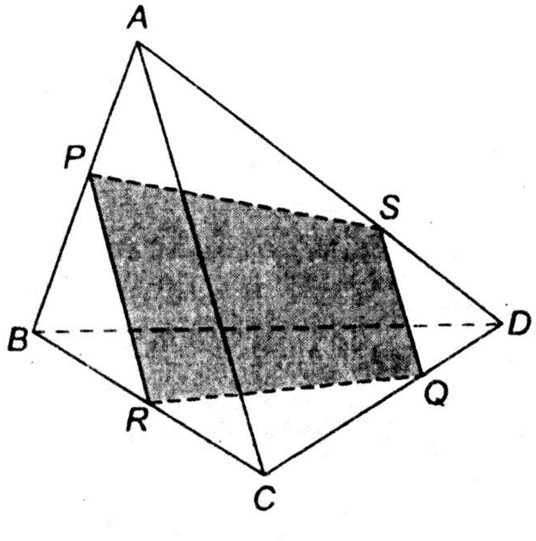
b) Lí luận tương tự câu a, ta có PS, RQ, và BD đôi một song song hoặc đồng quy.

2. Cho tứ diện ABCD và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Tìm giao điểm S của AD và mặt phẳng (PQR) trong hai trường hợp sau đây.

   a) PR song song với AC;

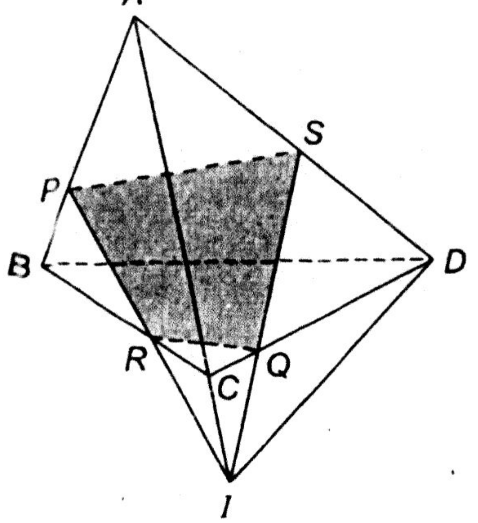
   b) PR cắt AC.

Giải



a) Nếu PR // AC thì QS // AC với S = (PQR) $\cap$ AD.

Vậy S là giao điểm của đường thẳng qua Q song song với AC và đường thẳng AD.



b) Gọi I = PR $\cap$ AC.

Ta có (PQR) $\cap$ (ACD) = IQ.

Gọi S = IQ $\cap$ AD, ta có S = AD $\cap$ (PQR).

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

a) Tìm giao điểm A' của đường thẳng AG và mặt phẳng (BCD);

b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA' và Mx cắt (BCD) tại M'. Chứng minh B, M', A' thẳng hàng và BM' = M'A' = A'N;

c) Chứng minh GA = 3GA'.

Giải

a) Gọi A' là giao điểm của BN và AG thì A' là giao điểm của AG và mp(BCD).

b) $\begin{cases} AA' \subset (ABN) \\ MM' // AA' \end{cases} \Rightarrow MM' \subset (ABN)$.

Ta có B, M', A' là điểm chung của hai mặt phẳng (ABN) và (BCD) nên B, M', A' thẳng hàng.

Trong tam giác NMM', ta có:

$\begin{cases} G \text{ là trung điểm } NM \\ GA' // MM' \end{cases}$

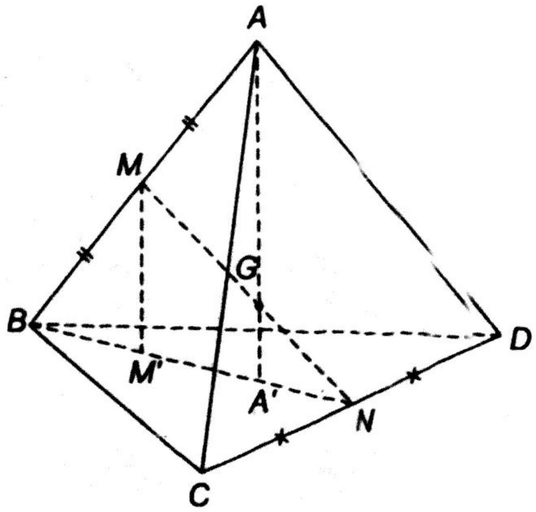
$\Rightarrow$ A' là trung điểm NM'.

Tương tự trong tam giác BAA', ta có:

$\begin{cases} M \text{ là trung điểm } BA \\ MM' // AA' \end{cases}$

$\Rightarrow$ M' là trung điểm BA'.

Vậy BM' = M'A' = A'N.



c) Ta có $\begin{cases} GA' = \dfrac{1}{2}MM' \\ MM' = \dfrac{1}{2}AA' \end{cases} \Rightarrow GA' = \dfrac{1}{4}AA' \Rightarrow GA = 3GA'$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh HK // CD.

b) Gọi M là điểm trên cạnh SC không trùng S. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (HKM) và (SCD).

c) Tìm giao tuyến hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Gọi K là điểm trên cạnh SB sao cho $SN = \frac{2}{3}SB$.

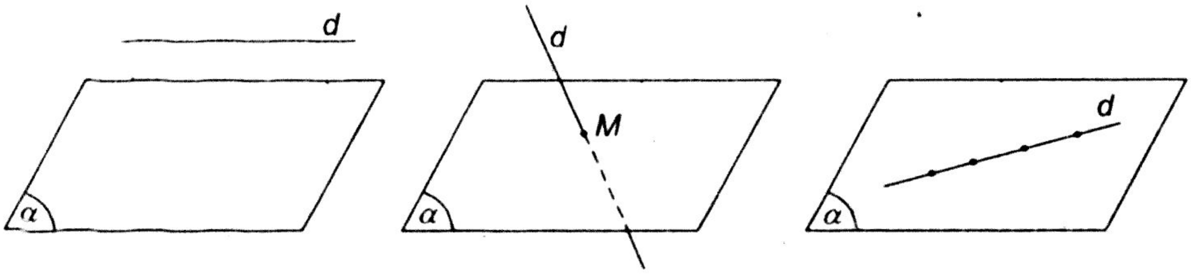
a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (IJK).

b) Xác định thiết diện của hình chóp mới mp(IJK). Tìm điều kiện đối với AB và CD để thiết diện là hình bình hành.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng



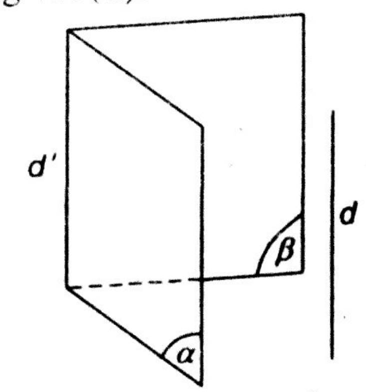
$d \parallel (\alpha)$ $\qquad$ $d \cap (\alpha) = \{M\}$ $\qquad$ $d \subset (\alpha)$

2. Tính chất

a) Định lí 1: Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).

b) Định lí 2: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.

c) Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



d) Định lí 3: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

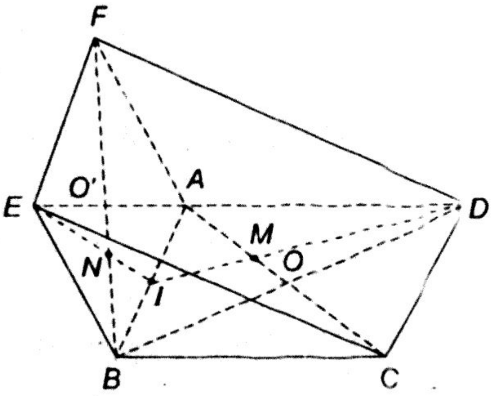
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và ABEF. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ABE. Chứng minh đường thẳng MN song song với mặt phẳng (CEF).

Giải



a) Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên OO' // DF, mà $DF \subset (ADF)$ nên OO' // (ADF).

Tương tự OO' // CE và $CE \subset (BCE)$ nên OO' // (BCE).

b) Tứ giác EFDC là hình bình hành, suy ra $ED \subset (CEF)$. Gọi I là trung điểm của AB ta có $\dfrac{IM}{ID} = \dfrac{IN}{IE} = \dfrac{1}{3}$ suy ra MN // ED.

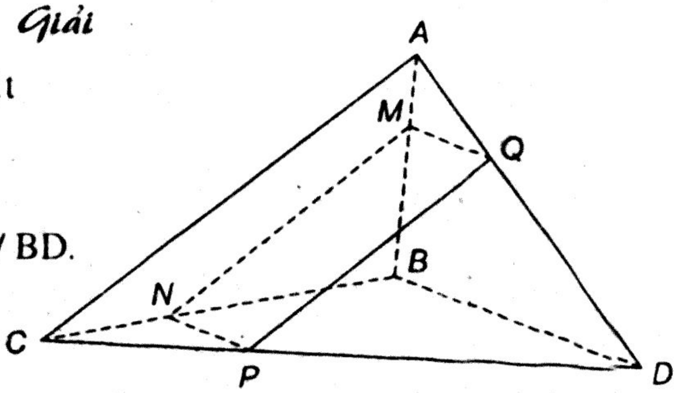
Ta lại có $ED \subset (CEF) \Rightarrow MN // (CEF)$.

2. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy một điểm M. Cho (α) là mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD.

a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện.

b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì ?

Giải



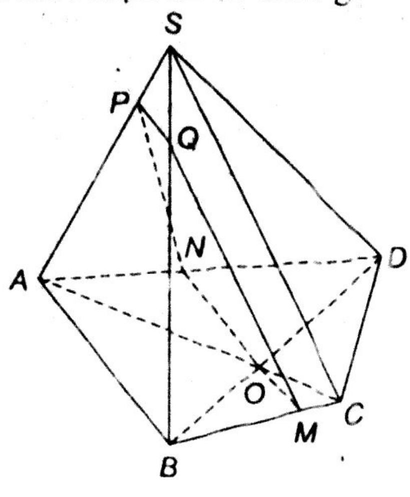
a) Giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện là các cạnh của tứ giác MNPQ có:

MN // PQ // AC và MQ // NP // BD.

b) Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) với tứ diện là hình bình hành.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) đi qua O, song song với AB và SC. Thiết diện đó là hình gì ?

Giải



Ta có $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABCD) \\ MN = (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow AB // MN$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) // SC \\ SC \subset (SBC) \\ MQ = (\alpha) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow SC // MQ.$

và $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (SAB) \\ PQ = (\alpha) \cap (SAB) \end{cases} \Rightarrow AB // PQ$

Vậy MN // PQ. Do đó tứ giác MNPQ là hình thang.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong mặt phẳng (α) cho ΔABC vuông tại A, $B = 60^0$, AB = a. Gọi O là trung điểm của BC. Lấy S ở ngoài (α) sao cho SB = a và $SB \perp OA$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB, mặt phẳng (β) qua M và song song với SB và OA cắt BC, SC, SA lần lượt tại N, P, Q. Đặt x = BM ($0 < x < a$).

a) Chứng minh MNPQ là hình thang vuông.

b) Tính theo α và x diện tích của hình thang này. Tính x để diện tích này lớn nhất.

Hướng dẫn

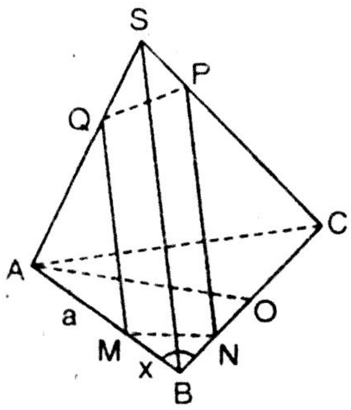
a) MNPQ là hình thang vuông.

Vì (α) // SB nên (α) cắt 2 mặt phẳng chứa SB là (SAB) và (SBC) lần lượt theo hai giao tuyến MQ và NP song song với BC nên MNPQ là hình thang.

Vì (α) // OA nên (α) cắt (ABC) theo giao tuyến MN // OA.

Theo giả thiết $SB \perp OA$ nên $QM \perp MN$.

Vậy MNPQ là hình thang vuông tại M.



b) $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MQ + NP).MN$

Ta có: $\dfrac{MQ}{SB} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow MQ = a - x$

Ta có: $\dfrac{NP}{SB} = \dfrac{CN}{CB} \Rightarrow NP = \dfrac{2a - x}{2}$

Vậy $S_{MNPQ} = \dfrac{x(4a - 3x)}{4}$. Ta có: $S_{MNPQ} = \dfrac{3x(4a - 3x)}{12}$.

3x và 4a – 3x có tổng bằng 4a (hằng số) nên tích 4x(4a – 3x) lớn nhất khi $3x = 4a - 3x$ hay $x = \dfrac{2a}{3}$.

2. Cho tứ diện ABCD có AB = a, CD = b. Đoạn IJ nối trung điểm I của AB và trung điểm J của CD. Giả sử $AB \perp CD$, (α) là mặt phẳng qua M trên đoạn IJ và song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (ICD).

b) Xác định thiết diện của ABCD với mặt phẳng (α). Chứng minh thiết diện là hình chữ nhật.

c) Tính diện tích hình chữ nhật, biết $IM = \frac{1}{3}IJ$.

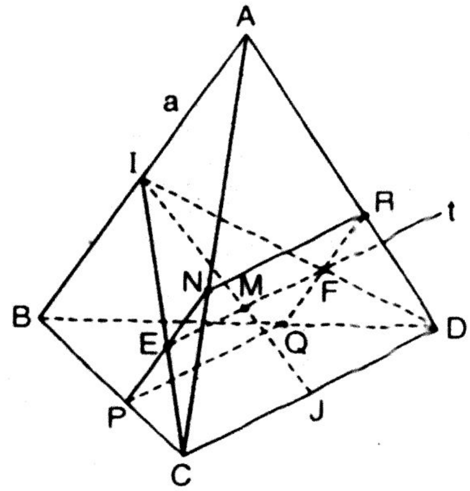
Hướng dẫn

a) Xác định $(\alpha) \cap (ICD)$

$(\alpha) \cap (ICD)$ có điểm chung M và $CD // (\alpha)$ nên (α) cắt (ICD) theo giao tuyến Mt qua M và song song CD.

b) Gọi E, F lần lượt giao điểm của Mt với CI và DI.

Qua E kẻ NP // AB, qua F kẻ QR // AB. Thiết diện là hình chữ nhật PQRN. Vì có NP // QR, PQ // NR và $NP \perp PQ$ (do $AB \perp CD$).



c) $S_{PQRN} = \dfrac{2ab}{9}$.

3. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a, I là trung điểm của AC, J là một điểm trên cạnh AD sao cho AJ = 2JD. M là một điểm di động trong ΔBCD, mặt phẳng (MIJ) luôn luôn song song với AB.

a) Tìm tập hợp điểm M.

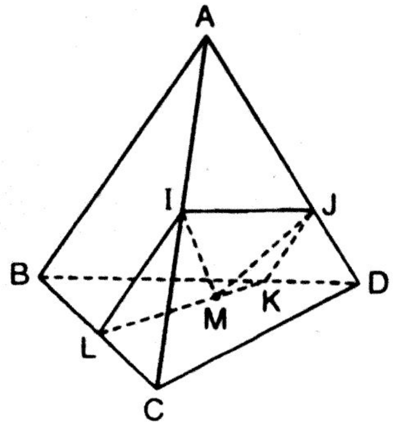
b) Tính diện tích thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng (MIJ).

Hướng dẫn

a) Gọi L là trung điểm của BC, K là điểm trên BD sao cho BK = 2KD.

Tập hợp điểm M là đoạn KI.

b) Thiết diện cần tìm là hình thang IJKL.



§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng (α), (β) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Khi đó ta kí hiệu (α) // (β) hay (β) // (α).

2. Tính chất

a) Định lí 1: Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

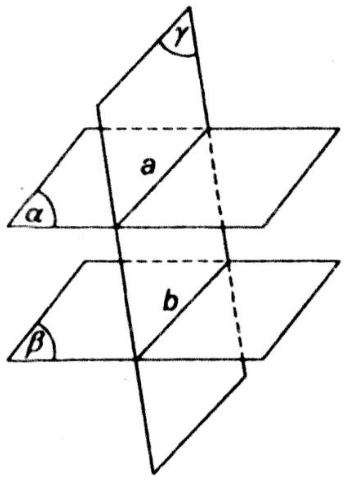
b) Định lí 2: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

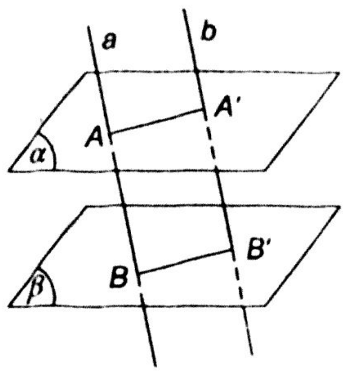
c) Hệ quả 1: Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α).

d) Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

e) Hệ quả 3: Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong một mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

f) Định lí 3: Cho hai mặt phẳng song song với nhau. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.





g) Hệ quả: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

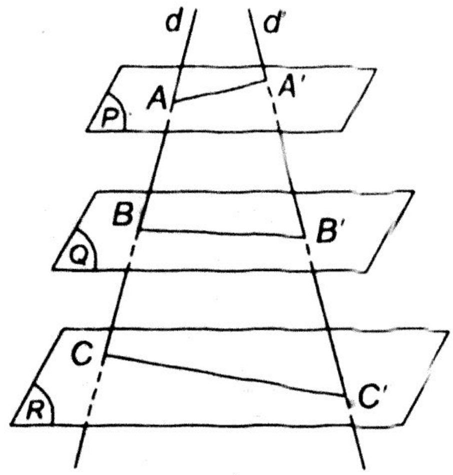
3. Định lí Ta-lét

Định lí 4 (Định lí Ta-lét)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

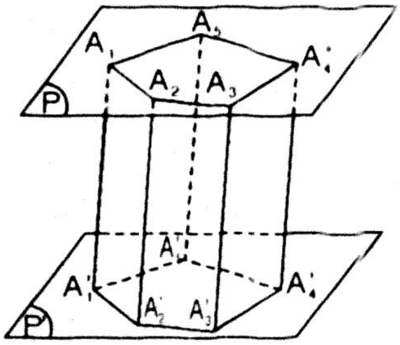
Nếu d, d' là hai cát tuyến bất kì cắt ba mặt phẳng song song (α), (β), (γ) lần lượt tại các điểm A, B, C và A', B', C' thì

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}.$$



4. Hình lăng trụ và hình hộp

Hình hợp bởi các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác $A_1A_2 \ldots A_n$ và $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ gọi là hình lăng trụ hoặc lăng trụ, và kí hiệu là $A_1A_2 \ldots A_nA'_1A'_2 \ldots A'_n$.

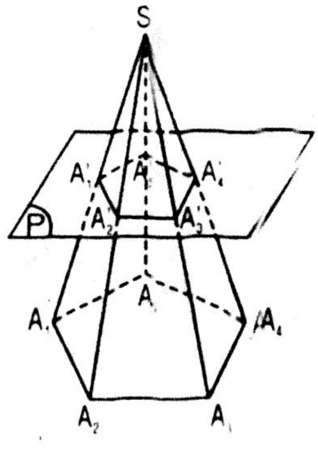


Nếu đáy của hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác thì lăng trụ tương ứng được gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác.

Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

5. Hình chóp cụt

Cho hình chóp $S.A_1A_2 \ldots A_n$; một mặt phẳng (P) không qua đỉnh, song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh SA_1, SA_2, ..., SA_n lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình tạo bởi thiết diện $A'_1A'_2, \ldots A'_n$ và đáy $A_1A_2 \ldots A_n$ của hình chóp cùng với các tứ giác $A'_1A'_2A_2A_1$, $A'_2A'_3A_3A_2$, ..., $A'_nA'_1A_1A_n$ gọi là hình chóp cụt, kí hiệu $A'_1A'_2 \ldots A'_n.A_1A_2 \ldots A_n$



Đáy của hình chóp gọi là đáy lớn của hình chóp cụt, còn thiết diện $A'_1A'_2 \ldots A'_n$ gọi là đáy nhỏ của hình chóp cụt.

Tính chất:

1) Hai đáy là hai đa giác có các cạnh tương ứng song song và các tỉ số các cặp cạnh tương ứng bằng nhau.
2) Các mặt bên là những hình thang.
3) Các đường thẳng chứa các cạnh bên đồng quy tại một điểm.

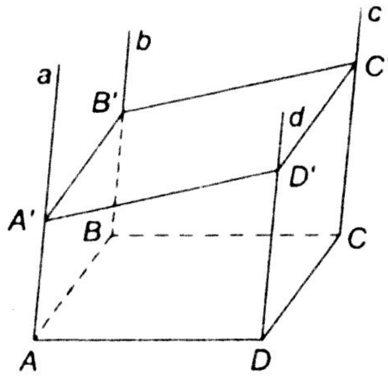
B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d song song với nhau và không nằm trên (α). Trên a, b, c lần lượt lấy ba điểm A', B', C' tuỳ ý.

a) Hãy xác định giao điểm D' của đường thẳng d với mặt phẳng (A'B'C').

b) Chứng minh A'B'C'D' là hình bình hành.

Giải



a) Ta có $\begin{cases} a // b \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow (a, AD) // (b, BC)$

Mà (A'B'C') $\cap$ (b, BC) = B'C' nên

(A'B'C') $\cap$ (a, AD) = d' đi qua A' song song với B'C'. Gọi D' là giao điểm của d' với d thì D' = d $\cap$ (A'B'C').

b) Ta có $\begin{cases} a // d \\ AB // CD \end{cases} \Rightarrow (a, b) // (c, d)$.

Ta có: A'D' // B'C'. (1)

Mặt khác: (a, b) // (c, d) mà (A'B'C'D') $\cap$ (a, b) = A'B'

và (A'B'C'D') $\cap$ (c, d) = C'D' suy ra A'B' // C'D'. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác A'B'C'D' là hình bình hành.

2. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và B'C'.

a) Chứng minh rằng AM song song với A'M'.

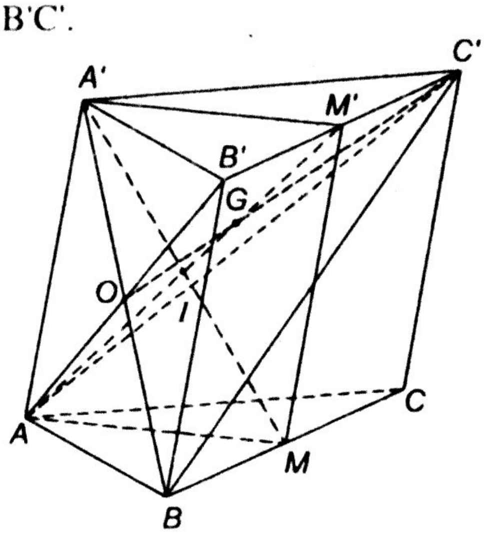
b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (AB'C') với đường thẳng A'M.

c) Tìm giao tuyến d của hai mặt phẳng (AB'C') và (BA'C').

d) Tìm giao điểm G của đường thẳng d với mặt phẳng (AM'M).

Chứng minh G là trọng tâm của tam giác AB'C'.

Giải



a) Ta có MM' // BB' và MM' = BB'

do đó MM' // AA' và MM' = AA'.

Suy ra A'M'MA là hình bình hành.

Vậy AM // A'M'.

b) Gọi I là giao điểm của A'M và AM'.

M'A $\subset$ (AB'C') và I $\in$ M'A nên I $\in$ (AB'C').

Vậy I = A'M $\cap$ (AB'C').

c) Gọi O là giao điểm của AB' và A'B.

Ta có: C', O ∈ (AB'C') ∩ (BA'C') ⇒ (AB'C') ∩ (BA'C') = C'O.

d) Ta có d ≡ C'O ⊂ (AB'C') và AM' ⊂ (AB'C').

Gọi G là giao điểm của d và AM' thì G = d ∩ (AM'M).

Mặt khác OC' và AM' là các trung tuyến của ΔAB'C' nên G là trọng tâm của ΔAB'C'.

3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'.

a) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) song song với nhau.

b) Chứng minh rằng đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1 và G_2 của hai tam giác BDA' và B'D'C.

c) Chứng minh G_1 và G_2 chia đoạn AC' thành ba phần bằng nhau.

d) Gọi O và I lần lượt là tâm của các hình bình hành ABCD và AA'C'C. Xác định thiết diện của mặt phẳng (A'IO) với hình hộp đã cho.

Giải

a) Chứng minh (BDA') // (B'D'C)

Ta có tứ giác BB'D'D và A'B'CD là các hình bình hành nên: BD // B'D' và AD'//B'C ⇒ hai mặt phẳng (BDA') và (B'D'C) có các cặp đường thẳng cắt nhau và song song nhau từng đôi một nên chúng song song. Vậy (BDA') // (B'D'C).

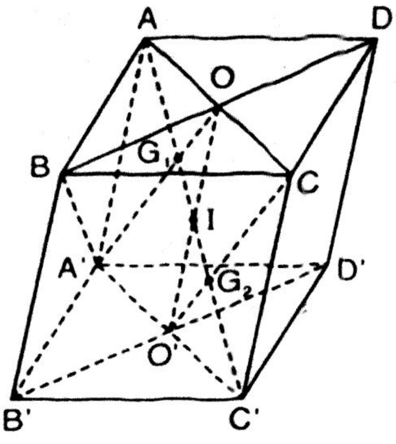
b) Chứng minh $G_1, G_2 \in$ AC'

Gọi O, O' lần lượt là tâm của hình bình hành ABCD và A'B'C'D'.

Trong mặt phẳng (AA'C'C) gọi G_1, G_2 lần lượt là giao điểm của AC' với A'O và O'C. Ta chứng minh G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của ΔA'BD và ΔCB'D'.

Thật vậy, ta có $\Delta G_1OA \backsim \Delta G_1A'C'$ (vì AC // A'C').

$$\Rightarrow \frac{G_1O}{G_1A'} = \frac{OA}{A'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AG_1}{A'O} = \frac{2}{3}$$



⇒ G_1 là trọng tâm ΔA'BD.

Tương tự G_2 là trọng tâm của ΔCB'D'.

Vậy AC' đi qua G_1, G_2.

c) Chứng minh $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$

Theo câu trên ta có:

$$\frac{AG_1}{G_1C'} = \frac{AO}{A'C'} = \frac{1}{2} \text{ (vì } \Delta G_1OA \backsim \Delta G_1A'C'\text{)}$$

$$\Rightarrow AG_1 = \frac{1}{3}AC' \text{ (1)}$$

Tương tự: $\dfrac{C'G_2}{G_2A} = \dfrac{C'O'}{CA} = \dfrac{1}{2}$ (vì $\Delta G_2C'O' \backsim \Delta G_2AC$)

$\Rightarrow \quad C'G_2 = \dfrac{1}{3}AC'$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$.

d) $(A'IO) \equiv (AA'C'C) \Rightarrow (A'IO)$ cắt hình hộp đã cho theo thiết diện là hình bình hành $AA'C'C$.

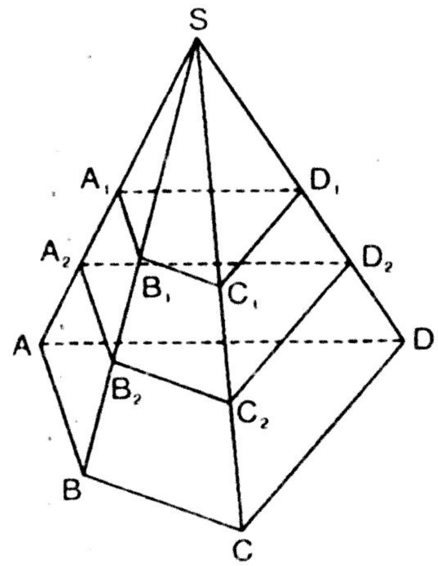
4. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi A_1 là trung điểm của cạnh SA và A_2 là trung điểm của đoạn AA_1. Gọi (α) và (β) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABCD) và lần lượt đi qua A_1, A_2. Mặt phẳng (α) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_1, C_1, D_1. Mặt phẳng (β) cắt các cạnh SB, SC, SD lần lượt tại B_2, C_2, D_2. Chứng minh:

a) B_1, C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC, SD;

b) $B_1B_2 = B_2B$, $C_1C_2 = C_2C$, $D_1D_2 = D_2D$;

c) Chỉ ra các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác ABCD.

Giải



a) Vì $(\alpha) // (\beta) // (ABCD)$ nên

$A_1B_1 // A_2B_2 // AB$; $B_1C_1 // B_2C_2 // BC$

$C_1D_1 // C_2D_2 // CD$, $A_1D_1 // A_2D_2 // AD$

A_1B_1 là đường trung bình của ΔSAB nên B_1 là trung điểm của SB.

Tương tự C_1, D_1 lần lượt là trung điểm của SC, SD.

b) Ta có A_2B_2 là đường trung bình của hình thang A_1B_1BA nên $B_1B_2 = B_2B$, tương tự $C_1C_2 = C_2C$, $D_1D_2 = D_2D$

c) Các hình chóp cụt có một đáy là tứ giác ABCD là $A_2B_2C_2D_2.ABCD$, $A_1B_1C_1D_1.ABCD$.

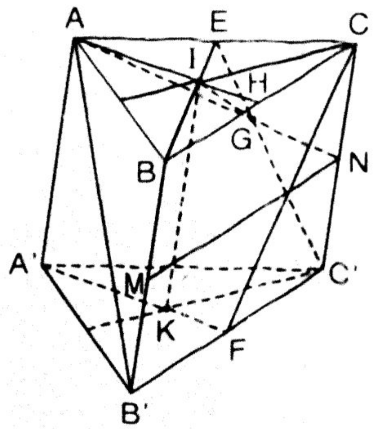
C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho hình lăng trụ tam giác ABCA'B'C'.

a) Gọi I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, A'B'C', ACC'. Chứng minh rằng (IGK) // (BB'C'C) và (A'KG) // (AIB').

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng qua trọng tâm tam giác ABC cắt AB' và MN.

Hướng dẫn



a) Tứ giác AA'KI thành hình bình hành

$\Rightarrow IK // AA' \Rightarrow IK // BB'$

Gọi E là trung điểm của AC. Xét $\Delta EBC'$ có:

$$\frac{IE}{EB} = \frac{GE}{EC'} = \frac{1}{3} \Rightarrow IG // BC'$$

Từ: $\begin{cases} IK // BB' \\ IG // BC' \end{cases} \Rightarrow (IGK) // (BB'C'C)$

b) Đường thẳng cần tìm là giao tuyến của (IAB') và (IMN).

Gọi H là giao điểm của BC và AI, B'H cắt MN tại O thì IO là đường thẳng cần dựng.

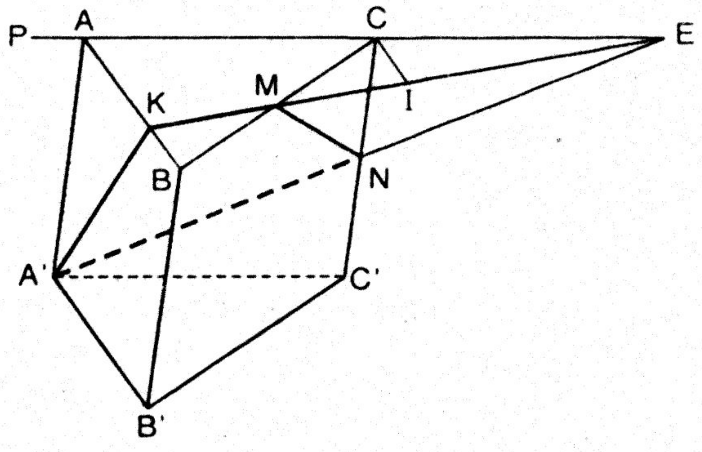
2. Cho lăng trụ tam giác ABCA'B'C. M, N lần lượt là trung điểm của BC và CC'. P là điểm đối xứng của C qua A.

a) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (A'MN). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AB.

b) Xác định thiết diện của lăng trụ với mặt phẳng (MNP). Tính tỉ số mà thiết diện chia cạnh AA' và AB.

Hướng dẫn

a) Tứ giác A'KMN là thiết diện cần tìm. C là trung điểm AE. Kẻ CI // AB thì CI = KB và $CI = \frac{1}{2}AK \Rightarrow AK = 2KB$. Vậy $\frac{AK}{KB} = 2$.



3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, B'C' và DA'.

a) Chứng minh (MNP) song song với các mặt phẳng (AB'D') và (BDC').

b) Xác định thiết diện của hình lập phương với mặt phẳng (MNP), thiết diện là hình gì? Tính diện tích của nó.

Đáp số: b) Thiết diện là hình lục giác đều cạnh $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

1. Cho hai hình thang ABCD và ABEF có chung đáy lớn AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

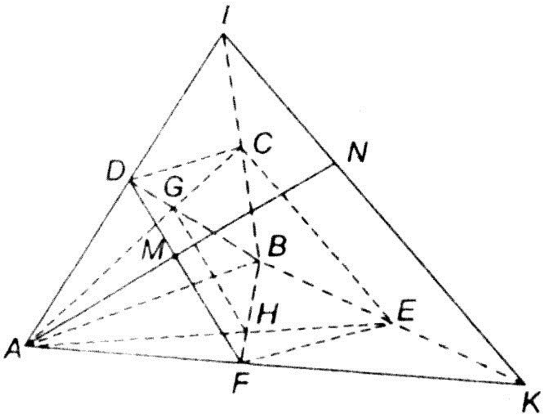
a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau:

(AEC) và (BFD); (BCE) và (ADF).

b) Lấy M là điểm thuộc đoạn DF. Tìm giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (BCE).

c) Chứng minh hai đường thẳng AC và BF không cắt nhau.

Giải



a) Gọi G là giao điểm của AC và BD,

H là giao điểm của AE và BF.

Ta có $G, H \in (AEC) \cap (BFD)$

$\Rightarrow (AEC) \cap (BFD) = GH$

Gọi I là giao điểm của AD và BC,

K là giao điểm của AF và BE.

Ta có $(BCE) \cap (ADF) = IK$.

b) Gọi N là giao điểm của AM với IK thì $N = AM \cap (BCE)$ (vì $IK \subset (BCE)$)

c) Nếu AC và BF cắt nhau thì hai hình thang đã cho cùng nằm trên một mặt phẳng. Điều này trái với giả thiết.

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành ABCD. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các đoạn thẳng SA, BC, CD. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD, hãy tìm giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (MNP).

Giải

Gọi $E = AB \cap NP$;

$F = AD \cap NP$;

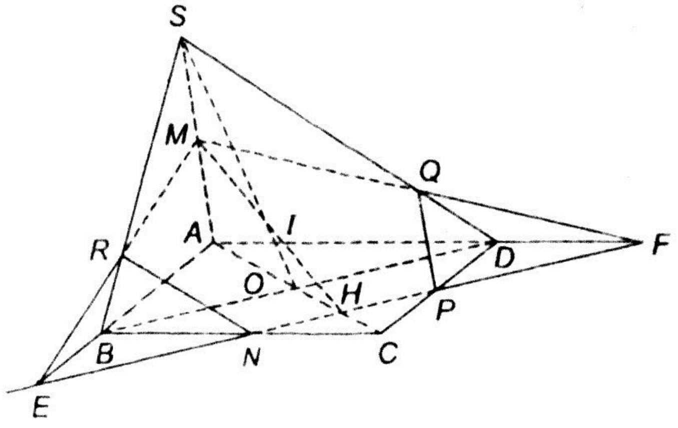
$R = SB \cap ME$;

$Q = SD \cap MF$.

Thiết diện là ngũ giác MQPNR.

Gọi $H = NP \cap AC$; $I = SO \cap MH$.

Ta có $I = SO \cap (MNP)$.

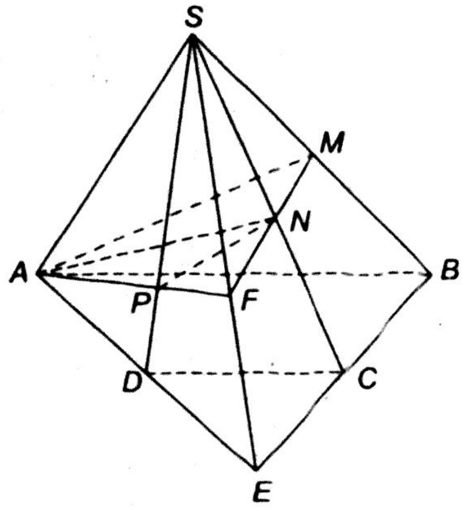


3. Cho hình chóp đỉnh S có đáy là hình thang ABCD với AB là đáy lớn. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của các cạnh SB và SC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

c) Tìm thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mặt phẳng (AMN).



Giải

a) Gọi E là giao điểm của AD và BC.

Ta có S, E $\in$ (SAD) $\cap$ (SBC)

nên (SAD) $\cap$ (SBC) = SE.

b) Gọi F là giao điểm của MN và SE.

P là giao điểm của SD và AF thì

P = SD $\cap$ (AMN).

c) Thiết diện của hình chóp S.ABCD cắt bởi mp(AMN) là tứ giác AMNP.

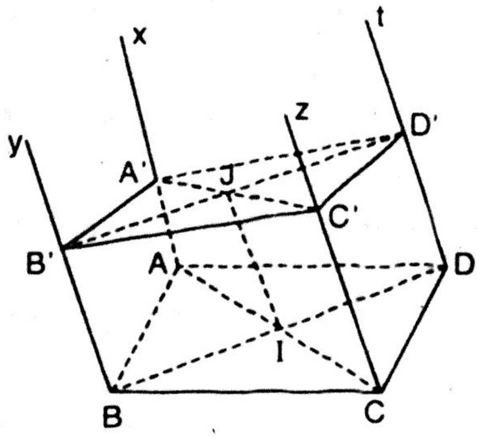
4. Cho hình bình hành ABCD. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía đối với mặt phẳng (ABCD), song song với nhau và không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng (β) lần lượt cắt Ax, By, Cz và Dt tại A', B', C' và D'.

a) Chứng minh (Ax, By) // (Cz, Dt).

b) Gọi I = AC $\cap$ BD, J = A'C' $\cap$ B'D'. Chứng minh IJ // AA'.

c) Cho AA' = a, BB' = b, CC' = c. Hãy tính DD'.

Giải



a) Ta có Ax // Dt và AB // CD

suy ra (Ax, By) // (Cz, Dt).

b) IJ là đường trung bình của hình thang BB'D'D nên IJ // BB' suy ra IJ // AA'.

c) Theo tính chất đường trung bình hình thang ta có:

$$AA' + CC' = 2IJ \text{ và } BB' + DD' = 2IJ.$$

Do đó AA' + CC' = BB' + DD'

$$\Rightarrow DD' = AA' + CC' - BB' = a + c - b.$$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG II

1. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

(A) Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng còn có vô số điểm chung khác nữa.

(B) Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

(C) Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(D) Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song với nhau thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Trả lời: (A), (B), (D) đúng. Chọn (C).

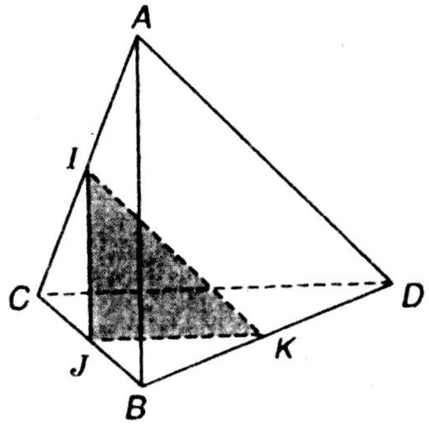
2. Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó

(A) Đồng quy; (B) Tạo thành tam giác;

(C) Trùng nhau; (D) Cùng song song với một mặt phẳng.

Trả lời: Xem bài tập 3 §1 chương II. Chọn (A).

3. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm của AC, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là



(A) KD;

(B) KI;

(C) Đường thẳng qua K và song song với AB;

(D) Không có.

Trả lời: IJ // AB $\Rightarrow$ IJ // (ABD) $\Rightarrow$ (IJK) cắt (ABD) theo giao tuyến qua K và song song với AB. Chọn (C).

4. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

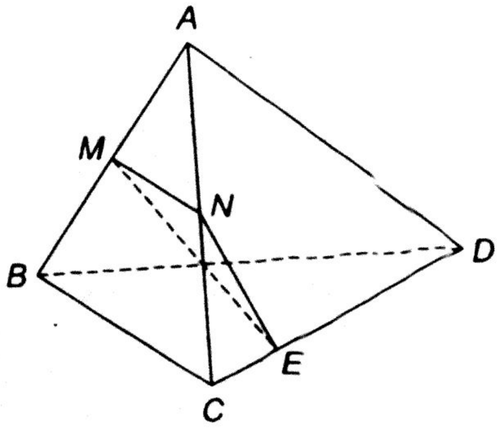
(B) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

(C) Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

(D) Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Trả lời: (B), (C), (D) sai. Chọn (A).

5. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. E là điểm trên cạnh CD với ED = 3EC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện ABCD là:



(A) Tam giác MNE.

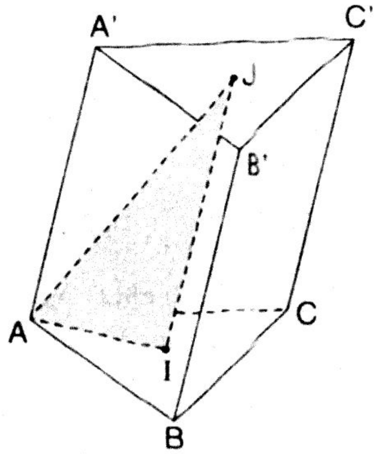
(B) Tứ giác MNEF với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

(C) Hình bình hành MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà EF // BC.

(D) Hình thang MNEF với F là điểm trên cạnh BD mà EF // BC.

Trả lời: MN // BC ⇒ MN // (BCD) ⇒ (MNE) cắt (BCD) theo giao tuyến qua E và song song với BC. Chọn (D).

6. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và A'B'C'. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AIJ) với hình lăng trụ đã cho là



(A) Tam giác cân;

(B) Tam giác vuông;

(C) Hình thang;

(D) Hình bình hành.

Trả lời: Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và B'C'. Thiết diện là hình bình hành A'AMN. Chọn (D).

7. Cho tứ diện đều SABC cạnh bằng a. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Thiết diện tạo bởi (α) và tứ diện SABC là

(A) Tam giác cân tại M;

(B) Tam giác đều;

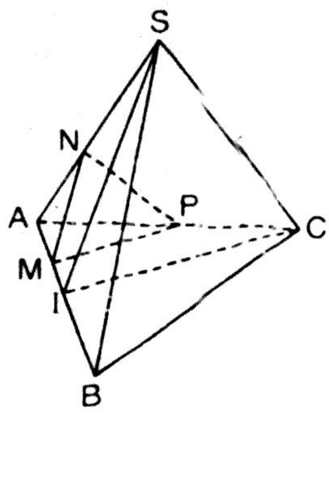
(C) Hình bình hành;

(D) Hình thoi.

Trả lời:

Ta có SI = CI ⇒ MN = MP.

Chọn (A).



8. Với giả thiết của bài tập 7 chu vi của thiết diện theo AM = x là

(A) $x(1 + \sqrt{3})$;

(B) $2x(1 + \sqrt{3})$;

(C) $3x(1 + \sqrt{3})$;

(D) Không tính được.

Trả lời: $AM = x \Rightarrow AB = 4x$

$\Rightarrow IC = 2x\sqrt{3}$

$\Rightarrow MN = MP = x\sqrt{3}$

Chu vi ΔMNP bằng $2x\sqrt{3} + 2x = 2x(1 + \sqrt{3})$. Chọn (B).

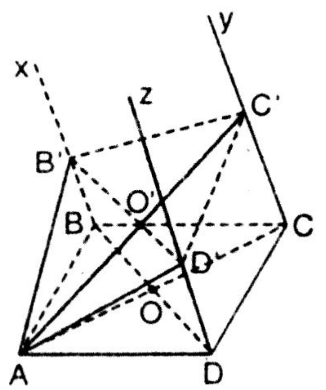
9. Cho hình bình hành ABCD. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng song song lần lượt với nhau đi qua B, C, D và nằm về một phía của mặt phẳng (ABCD), đồng thời không nằm trong mặt phẳng (ABCD). Một mặt phẳng đi qua A và cắt Bx, Cy, Dz lần lượt tại B', C', D' với BB' = 2, DD' = 4. Khi đó CC' bằng

(A) 3;

(B) 4;

(C) 5;

(D) 6.



Trả lời: Gọi O và O' lần lượt là tâm các hình bình hành ABCD và AB'C'D'.

Ta có: $BB' + DD' = 2OO' = CC'$

$\Rightarrow$ $CC' = 6$. Chọn (D)

10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng nằm trong một mặt phẳng thì không chéo nhau;

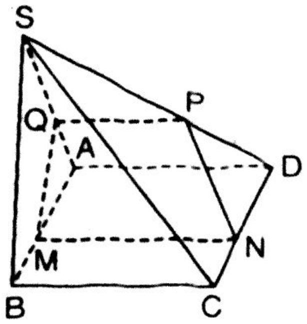
(B) Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau thì chéo nhau;

(C) Hai đường thẳng phân biệt không song song thì chéo nhau;

(D) Hai đường thẳng phân biệt lần lượt thuộc hai mặt phẳng khác nhau thì chéo nhau.

Trả lời: (B), (C), (D) sai. Chọn (A).

11. Cho hình vuông ABCD và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBC).



Thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp S.ABCD là hình gì ?

(A) Tam giác;

(B) Hình bình hành;

(C) Hình thang;

(D) Hình vuông.

Trả lời: Thiết diện là hình thang MNPQ. Chọn (C).

12. Với giả thiết của bài tập 11 gọi N, P, Q lần lượt là giao của mặt phẳng (α) với các đường thẳng CD, DS, SA. Tập hợp các giao điểm I của hai đường thẳng MQ và NP là

(A) Đường thẳng;

(B) Nửa đường thẳng;

(C) Đoạn thẳng song song với AB;

(D) Tập hợp rỗng.

Trả lời: $MQ \subset (SAB)$, $NP \subset (SCD)$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$. Chọn (C).

Chương III. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

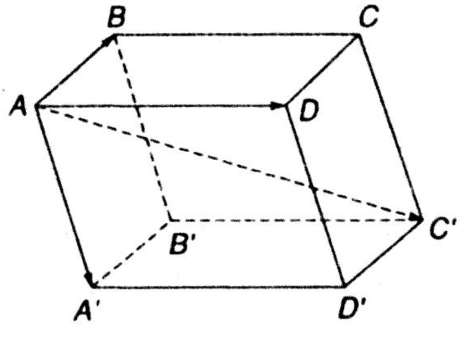
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa và các phép toán về vectơ trong không gian

a) Định nghĩa: Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. Kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A, điểm cuối B. Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

b) Phép cộng và phép trừ vectơ trong không gian: Phép cộng và phép trừ hai vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như phép cộng và phép trừ hai vectơ trong mặt phẳng. Phép cộng vectơ trong không gian cũng có các tính chất như phép cộng vectơ trong mặt phẳng. Khi thực hiện phép cộng vectơ trong không gian ta vẫn có thể áp dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành như đối với vectơ trong hình học phẳng.

Quy tắc hình hộp: Nếu hình hộp ABCD.A'B'C'D' có ba cạnh xuất phát từ đỉnh A là AB, AD, AA' và có đường chéo là AC' thì khi đó ta có quy tắc hình hộp là: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$



c). Phép nhân vectơ với một số: Trong không gian, tích của vectơ $\vec{a}$ với một số $k \neq 0$ là vectơ $k\vec{a}$ được định nghĩa tương tự như trong mặt phẳng và có các tính chất giống như các tính chất đã được xét trong mặt phẳng.

2. Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ

a) Định nghĩa: Trong không gian ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

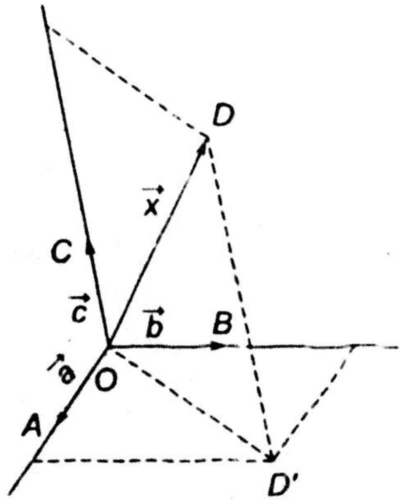
b) Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng

Định lí 1: Trong không gian cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương và vectơ $\vec{c}$. Khi đó ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m,

n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Ngoài ra cặp số m, n là duy nhất.

Định lí 2: Trong không gian cho ba vectơ không đồng phẳng $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Khi đó với mọi vectơ $\vec{x}$ ta đều tìm được một bộ ba số m, n, p sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$. Ngoài ra bộ ba số m, n, p là duy nhất.

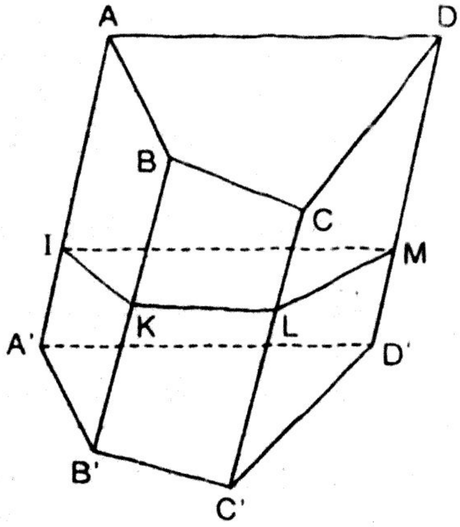


B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D'. Mặt phẳng (P) cắt các cạnh bên AA', BB', CC', DD' lần lượt tại I, K, L, M. Xét các vectơ có các điểm đầu là các điểm I, K, L, M và có các điểm cuối là các đỉnh của hình lăng trụ. Hãy chỉ ra các vectơ:

a) cùng phương với $\overrightarrow{IA}$;   b) cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$;

c) ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$.



Giải

a) Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{LC'}, \overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MD'}$.

b) Các vectơ cùng hướng với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{LC}, \overrightarrow{MD}$.

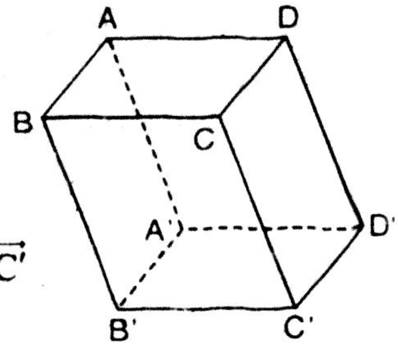
c) Các vectơ ngược hướng với $\overrightarrow{IA}$ là:

$\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{KB'}, \overrightarrow{LC'}, \overrightarrow{MD'}$.

2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$;   b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BB'}$;

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \vec{0}$.



Giải

a) Áp dụng quy tắc hình hộp, ta có

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

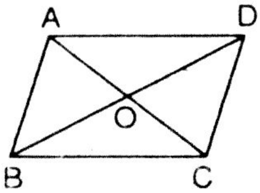
Cách khác: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'B'} = \overrightarrow{BB'}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} + \overrightarrow{D'B'} + \overrightarrow{B'A} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng chứa hình bình hành. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

Giải



Gọi O là tâm của hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}$ và $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}$

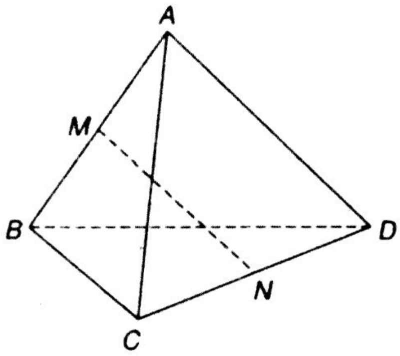
Do đó: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Cách khác:

$$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{BA}\right)+\left(\overrightarrow{SD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}+\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$$

4. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$; b) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$.



Giải

a) Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\end{cases}$

Suy ra $2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$

b) Tương tự: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}$

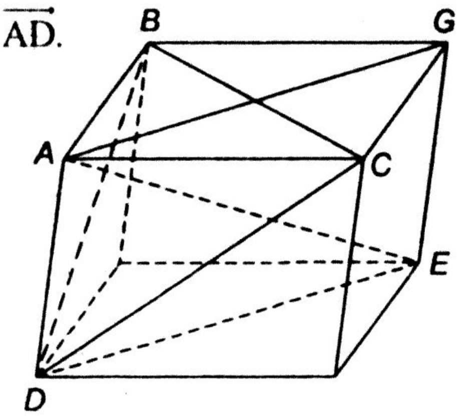
Suy ra $2\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right)+\left(\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{DN}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD})$.

5. Cho hình tứ diện ABCD. Hãy xác định hai điểm E, F sao cho:

a) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$; b) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$.

Giải



a) Ta có $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

mà $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AD}$

với G là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABGC vì $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

Vậy $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AD}$ với E là đỉnh thứ tư của hình bình hành AGED.

Do đó AE là đường chéo của hình hộp có ba cạnh là AB, AC, AD.

b) Ta có $\overrightarrow{AF} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DG}$.

Vậy F là đỉnh thứ tư của hình bình hành ADGF.

6. Cho hình tứ diện ABCD. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{DG}$.

Giải

G là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC}\right)$$

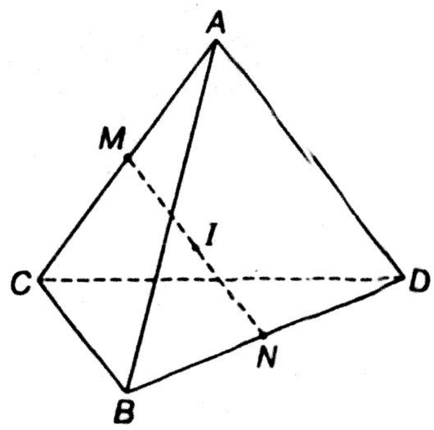
$$= 3\overrightarrow{DG} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = 3\overrightarrow{DG}$$

7. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC và BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MN và P là một điểm bất kì trong không gian. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD})$.

Giải



a) Ta có $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0}$

mà $2\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$ và $2\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID}$

nên $2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) = \vec{0}$

suy ra $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

b) Với điểm P bất kì trong không gian ta có:

$\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PI}$, $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PI}$

$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PI}$, $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PI}$.

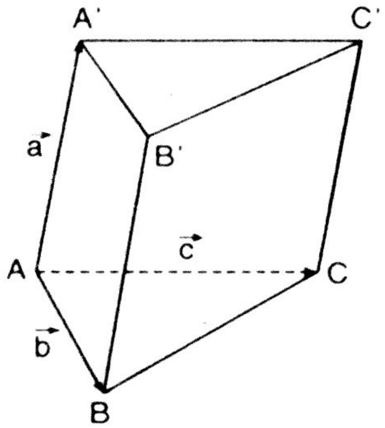
Vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} - 4\overrightarrow{PI}$

mà theo câu a), ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ nên suy ra:

$$\overrightarrow{PI} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}).$$

8. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (hay biểu thị) các vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Giải



Ta có:

$$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB})$$

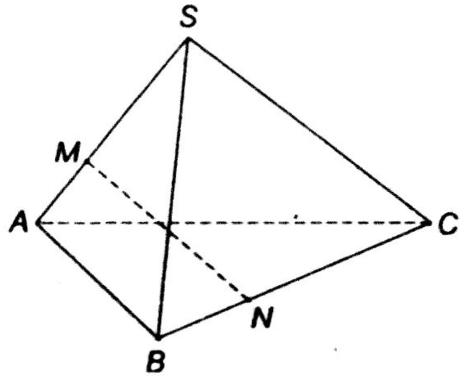
$$= \vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB}$$

$$= \vec{a} + \vec{c} - \vec{b}$$

9. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS} = -2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

Giải



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BN} \qquad (2)$$

Cộng (1) với (2) ta được:

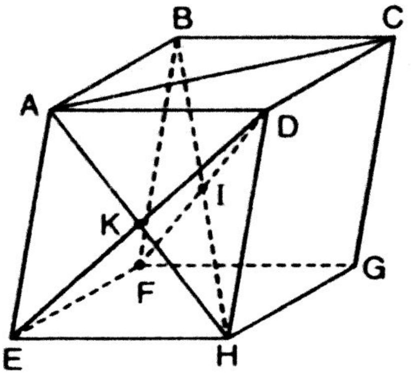
$$3\overrightarrow{MN} = \underbrace{\overrightarrow{MS} + 2\overrightarrow{MA}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{SC} + 2\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{BN}}_{\vec{0}}.$$

Vậy $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}$ đồng phẳng.

10. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi K là giao điểm của AH và DE, I là giao điểm của BH và DF. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}$ đồng phẳng.

Giải



Ta có KI // EF // AB nên KI // mp (ABC),

FG // BC và AC ⊂ mp (ABC).

Do đó ba vectơ $\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{AC}$ có giá cùng song song với một mặt phẳng (α) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC). Vậy ba vectơ $\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{AC}$ đồng phẳng.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

b) M bất kì trong không gian, chứng minh: $4\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

c) Tìm $M \in (P)$ cố định sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{IE}$, $\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IF}$ và $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}=\vec{0}$.

b) Áp dụng quy tắc 3 điểm xen I vào vế phải.

c) Áp dụng câu b) $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right|=4\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I lên (P).

2. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB, A'D, gọi P', Q, Q' lần lượt là giao điểm các đường chéo của các mặt ABCD, CDD'C, A'B'C'D', ADD'A'.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{QQ'}+\overrightarrow{RR'}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng hai tam giác PQR, P'Q'R' có cùng trọng tâm.

Hướng dẫn

a) $\overrightarrow{PP'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{QQ'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DA'}$, $\overrightarrow{RR'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'A}$

$$=\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{QQ'}+\overrightarrow{RR'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA'}+\overrightarrow{A'A}\right)=\vec{0}$$

b) Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm ΔPQR và $\Delta P'Q'R'$. Áp dụng a) và hệ ba điểm suy ra: $3\overrightarrow{GG'}=\vec{0}$

3. Cho hình hộp xiên ABCD.A'B'C'D. Gọi G là trọng tâm tam giác A'B'C'.

a) Chứng minh $\overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$

b) Gọi P, Q, R là ảnh đối xứng của điểm D' qua các điểm A, B', C. Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện PQRD'.

Hướng dẫn

a) Áp dụng quy tắc trọng tâm $3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD'}$

b) Chứng minh $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{BR}+\overrightarrow{BD'}=\vec{0}$

§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

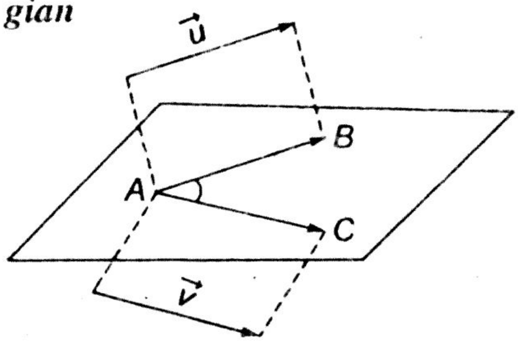
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

a. Góc giữa hai vectơ trong không gian

Định nghĩa: Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác vectơ - không. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ $(0^0 \leq \widehat{BAC} \leq 180^0)$ là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ trong không gian, kí hiệu là $(\vec{u}, \vec{v})$

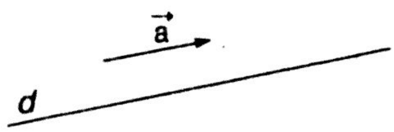
b. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian



Định nghĩa: Trong không gian cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đều khác vectơ - không. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$, được xác định bởi công thức:

$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$

2. Vectơ chỉ phương của đường thẳng



Định nghĩa: Vectơ $\vec{a}$ khác vectơ - không được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của vectơ $\vec{a}$ song song hoặc trùng với đường thẳng d.

3. Góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Định nghĩa: Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b.

4. Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa: Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

Kí hiệu hai đường thẳng a và b vuông góc với nhau là $a \perp b$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau đây:

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$;

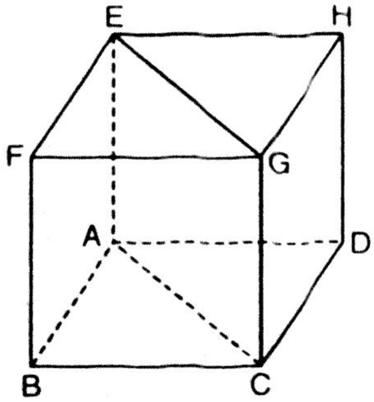
b) $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$;

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$.

Giải

a) Ta có $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ nên

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 45^{o}.$$



b) Tam giác FAC đều nên

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EG}) = \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}\right) = 60^{o}.$$

c) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DH}) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}\right) = 90^{o}$.

2. Cho tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$.

b) Từ đẳng thức trên hãy suy ra rằng nếu tứ diện ABCD có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.

Giải

a) Ta có

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) + \overrightarrow{AD}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}. - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = 0$$

b) Nếu $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$ thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$.

Theo câu a) suy ra $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

$$\Rightarrow AD \perp BC.$$

3. **a) Trong không gian nếu hai đường thẳng a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b có song song với nhau không ?**

b) Trong không gian nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a có vuông góc với c không ?

Trả lời

a) a và b nói chung không song song

b) a và c nói chung không vuông góc.

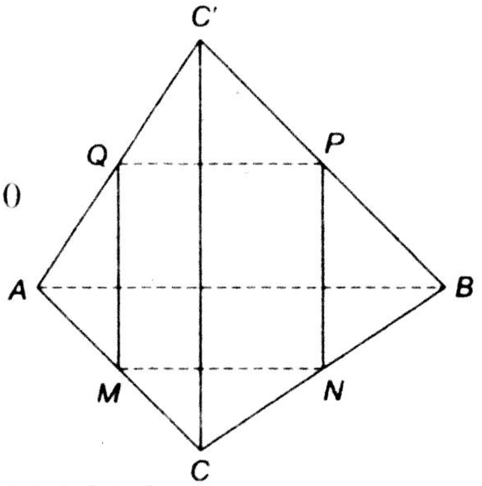
4. **Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC', C'A.**

Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CC'$;

b) Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Giải



a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC})$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AC'.\cos 60^0 - AB.AC'.\cos 60^0 = 0$

$\Rightarrow AB \perp CC'$.

b) Ta có: $\begin{cases} MQ // CC' \text{ và } MQ = \dfrac{1}{2}CC' \\ NP // CC' \text{ và } NP = \dfrac{1}{2}CC' \end{cases}$

$\Rightarrow$ MQ // NP và MQ = NP $\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành.

Mặt khác PQ // AB, MQ // CC', AB $\perp$ CC' nên MQ $\perp$ PQ. Do đó hình bình hành MNPQ là hình chữ nhật.

5. Cho hình chóp tam giác S.ABC có SA = SB = SC và có $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng SA $\perp$ BC, SB $\perp$ AC, SC $\perp$ AB.

Giải

Ta có $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$$= SA.SC.\cos\widehat{ASC} - SA.SB.\cos\widehat{ASB} = 0 \Rightarrow SA \perp BC$$

Chứng minh tương tự ta được SB $\perp$ AC, SC $\perp$ AB.

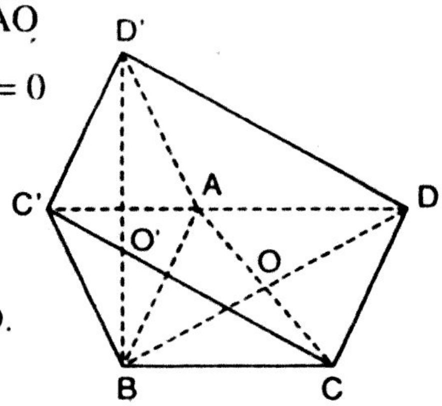
6. Trong không gian cho hai hình vuông ABCD và ABC'D' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O'. Chứng minh rằng AB $\perp$ OO' và tứ giác CDD'C' là hình chữ nhật.

Giải

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO'} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$

$= AB.AO'\cos 45^0 - AB.AO.\cos 45^0 = 0$

$\Rightarrow$ AB $\perp$ OO'.



Ta có CD // C'D' và CD = C'D' nên tứ giác CDD'C' là hình bình hành.

Mặt khác OO' // CC' nên CC' $\perp$ AB $\Rightarrow$ CC' $\perp$ CD.

Vậy hình bình hành CDD'C' là hình chữ nhật.

7. Cho S là diện tích của tam giác ABC. Chứng minh rằng:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}.$$

Giải

Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC\sin A = \frac{1}{2}AB.AC\sqrt{1-\cos^2 A}$.

Vì $\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|}$ nên $\sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{\frac{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2}}$.

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC})^2}$.

8. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0$. Chứng minh rằng:

a) $AB \perp CD$;

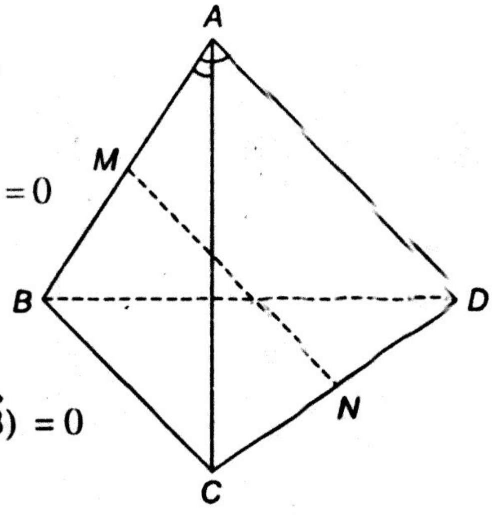
b) Nếu M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

Giải

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0 = 0 \Rightarrow AB \perp CD$.

b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$ (bài tập 4)



$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2)$

$= \frac{1}{2}(AB^2\cos 60^0 + AB^2\cos 60^0 - AB^2) = 0$

Do đó $MN \perp AB$.

Chứng minh tương tự ta có

$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$

Vậy $MN \perp CD$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD.

a) Tính độ dài đoạn MN;

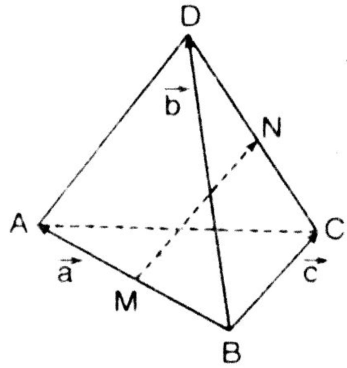
b) Tính góc giữa các đường thẳng MN và BC,

c) Chứng minh: $MN \perp AB$ và $MN \perp CD$.

Hướng dẫn

Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = a$ và $\vec{a}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \frac{1}{2}a^2$

Khi đó: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$



a) $\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}(a^2 + a^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 2\vec{b}\vec{c} - 2\vec{a}\vec{c}) = \frac{1}{2}a^2.$$

b) $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}a^2$, góc giữa MN, BC là 45^0

c) Ta có $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{MN} = \vec{a}\frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2}(\vec{a}.\vec{b} - a^2 + \vec{a}.\vec{c}) = 0 \Rightarrow MN \perp AB$

$$\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{c}\right).\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right) = \frac{1}{2}(a^2 - \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} - \vec{c}.\vec{b} + \vec{c}.\vec{a} - a^2) = 0$$

$\Rightarrow MN \perp CD$

2. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Các điểm M, N lần lượt chia các đoạn thẳng AD' và DB theo cùng tỉ số k ($k \neq 0, 1$).

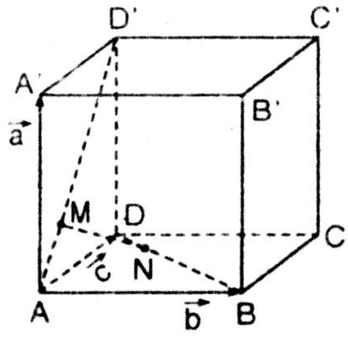
a) Chứng minh rằng MN luôn luôn song song với mp(A'D'BC); và chứng minh rằng nếu $k = -\frac{1}{2}$ thì:

b) MN // A'C; c) $MN \perp AD'$ và $MN \perp BD$

Hướng dẫn

a) Đặt: $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Theo giả thiết, ta có:



$\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'} \quad \Rightarrow \overrightarrow{MA} = k\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD'}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AD'} = \frac{k}{k-1}\left(\vec{a} + \vec{c}\right)$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AD} - k\overrightarrow{AB}}{1-k} = \frac{\vec{c} - k\vec{b}}{1-k}$$

Suy ra: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{\vec{c} - k\vec{b} + k\vec{a} + k\vec{c}}{1-k}$

$$= \frac{1}{1-k}\left[k\left(\vec{a} - \vec{b}\right) + (k+1)\vec{c}\right] = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{BA'} + \frac{1+k}{1-k}\overrightarrow{BC} \; (1)$$

Đẳng thức (1) chứng tỏ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng và do MN không thuộc mp(A'BCD') nên MN // mp(A'BCD').

Khi $k = -\frac{1}{2}$ thì (1) trở thành: $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}$

b) Và do các đường thẳng MN và A'C cắt mp(ABCD) tại các điểm khác nhau nên chúng không trùng nhau. Vậy MN // A'C.

c) Ta có: $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'C}.\overrightarrow{AD'} = \frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}\right)\left(\vec{c}+\vec{a}\right) = \frac{1}{3}\vec{b}\left(\vec{c}+\vec{a}\right)+\frac{1}{3}\left(\vec{c}^2-\vec{a}^2\right)=0$

(Vì AB ⊥ mp(ADD'A') và $\left(\vec{a}^2=\vec{c}^2\right)$.

Vậy MN ⊥ AD'.

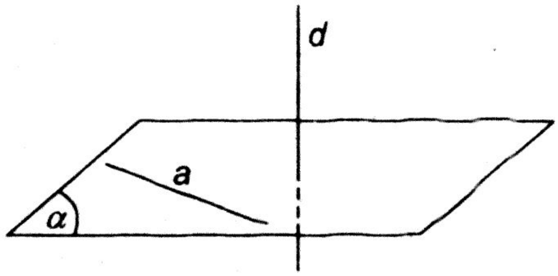
§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α).

Kí hiệu là d ⊥ (α).



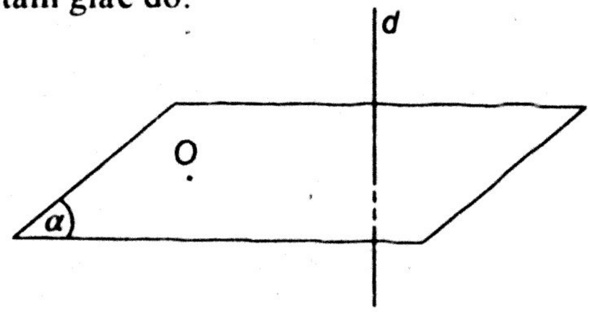
2. Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Định lí: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Hệ quả: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì nó cũng vuông góc với cạnh thứ ba của tam giác đó.

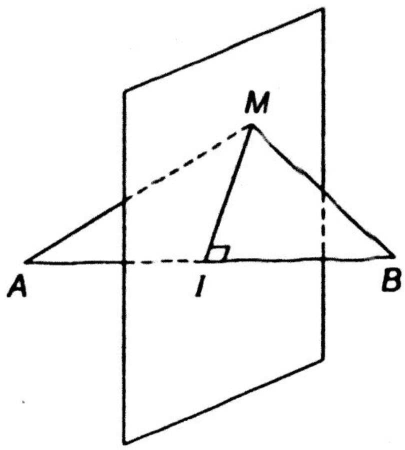
3. Tính chất

a) Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.

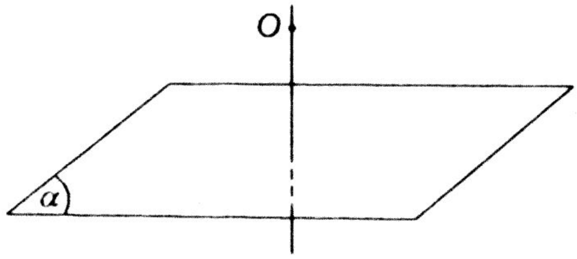


Mặt phẳng trung trực của một đoạn thẳng

Người ta gọi mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.



b) *Tính chất 2:* Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

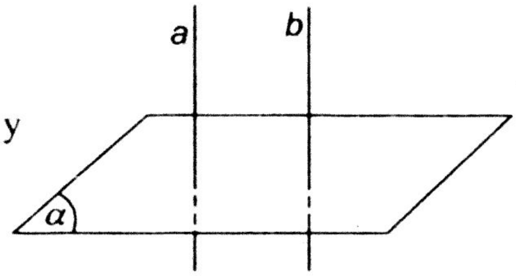


4. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Tính chất 1

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

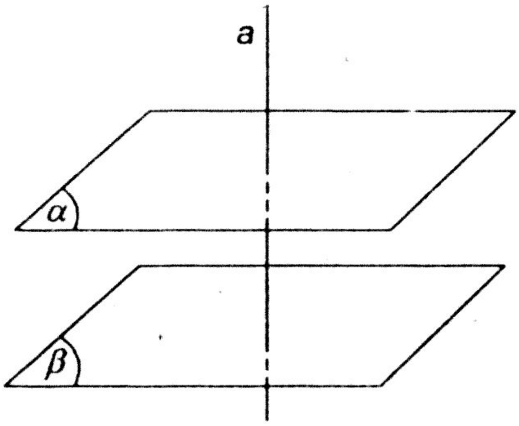
b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



Tính chất 2

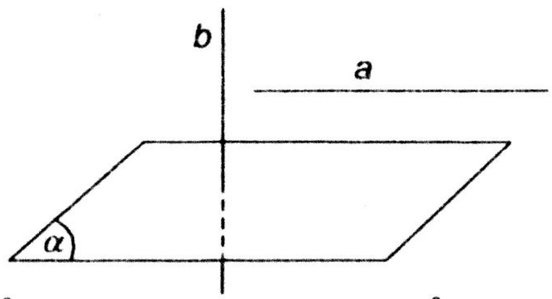
a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Tính chất 3

a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a.



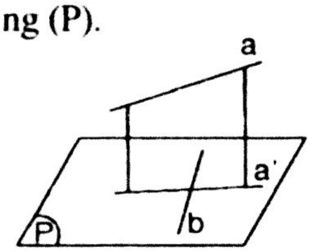
b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.

5. Định lí ba đường vuông góc

Định nghĩa: Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương l vuông góc tới mặt phẳng (P) gọi là phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P).

Định lí (Định lí 3 đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) và đường thẳng b nằm trong (P). Khi đó điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (P).

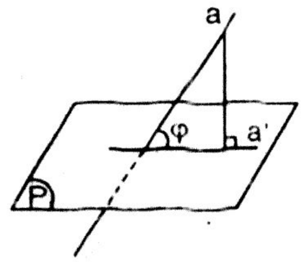


$b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa: Nếu đường thẳng a $\perp$ (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90^0.

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) (α) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P).



Chú ý: Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^0 \le \varphi \le 90^0$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Các mệnh đề sau đây đúng hay sai ?

a) Nếu a // (α) và b $\perp$ (α) thì a $\perp$ b.

b) Nếu a // (α) và b $\perp$ a thì b $\perp$ (α).

c) Nếu a // (α) và b // (α) thì b // a.

d) Nếu a $\perp$ (α) và b $\perp$ a thì b // (α).

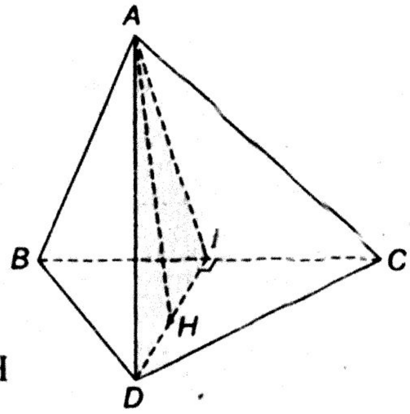
Trả lời: a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Sai.

2. Cho tứ diện ABCD có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC. Gọi I là trung điểm của cạnh BC.

a) Chứng minh rằng BC vuông góc với mặt phẳng (ADI).

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ADI, chứng minh rằng AH vuông góc với mặt phẳng (BCD).

Giải



a) Tam giác ABC và BCD cân có đáy BC và I là trung điểm của BC nên

$$\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADI)$$

b) Ta có BC $\perp$ (ADI) và AH $\subset$ (ADI) $\Rightarrow$ AB $\perp$ AH

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp DI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (BCD)$$

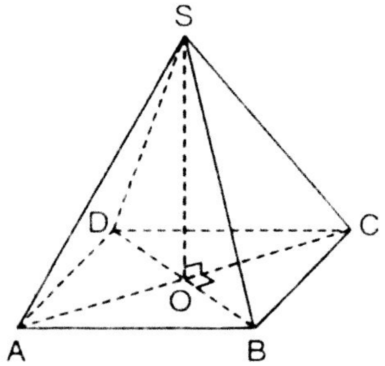
3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có SA = SB = SC = SD. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

b) Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng (SBD) và đường thẳng BD vuông góc với mặt phẳng (SAC).

Giải

a) SO là đường cao của hai tam giác cân SAC, SBD ta có:



$$\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

b) Ta có: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

$$\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

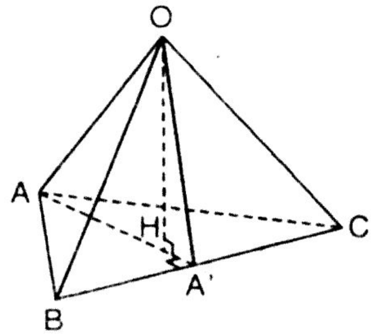
4. Cho tứ diện OABC có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O tới mặt phẳng (ABC). Chứng minh rằng:

a) H là trực tâm của tam giác ABC;

b) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

Giải

a) Vì H là hình chiếu của điểm O trên mp(ABC) nên $OH \perp (ABC)$. Mặt khác $OA \perp (OBC)$ nên $OA \perp BC$. Vậy $AH \perp BC$ (định lí ba đường vuông góc), tức là H thuộc một đường cao của tam giác ABC. Tương tự như trên ta cũng có H thuộc đường cao thứ hai của tam giác ABC. Vậy H là trực tâm tam giác ABC.



b) Nếu $AH \perp BC$ tại A' thì $BC \perp OA'$. Vì OH là đường cao của tam giác vuông AOA' (vuông tại O) và OA' là đường cao của tam giác vuông BOC (vuông tại O) nên: $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OA'^2}$, $\dfrac{1}{OA'^2} = \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

Vậy $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$.

5. Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của AC và BD, S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho SA = SC, SB = SD. Chứng minh rằng:

a) $SO \perp (\alpha)$;

b) Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ SH vuông góc với AB tại H thì AB vuông góc với mặt phẳng (SOH).

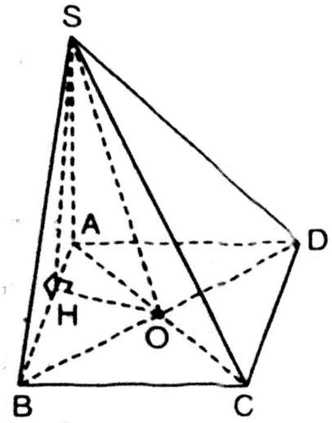
Giải

a) SO là đường cao của hai tam giác cân SAC và SBD nên $SO \perp AC$ và $SO \perp BC$

$\Rightarrow \ SO \perp (ABCD) = (\alpha)$

b) Vì $SO \perp (ABCD)$ và $AB \subset (ABCD)$ nên $AB \perp SO$.

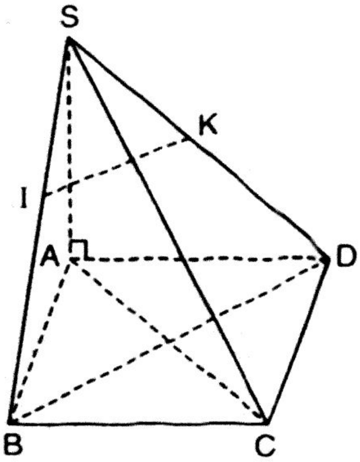
Ta có $\begin{cases} AB \perp SO \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOH)$.



6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD và có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SK}{SD}$. Chứng minh:

a) BD vuông góc với SC;

b) IK vuông góc với mặt phẳng (SAC).



Giải

a) ABCD là hình thoi nên:

$AC \perp BD$; $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BD$

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Mà $SC \subset (SAC)$ nên $BD \perp SC$.

b) Vì $\dfrac{SI}{SB} = \dfrac{SK}{SD}$ nên $IK \perp BD$. Mà $BD \perp (SAC)$ nên $IK \perp (SAC)$.

7. Cho tứ diện SABC có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có tam giác ABC vuông tại B. Trong mặt phẳng (SAB) kẻ AM vuông góc với SB tại M. Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng:

a) $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$;

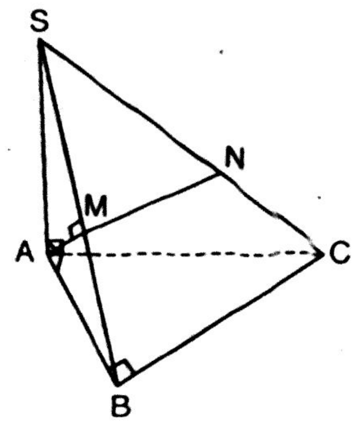
b) $SB \perp AN$.

Giải

a) Ta có $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \ \text{(vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow \ BC \perp (SAB)$

$\begin{cases} BC \perp AM \\ AM \perp SB \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC)$



b) Vì $\dfrac{SM}{SB} = \dfrac{SN}{SC}$ nên MN // BC, mà $BC \perp (SAB)$

nên $BC \perp SB \Rightarrow SB \perp MN$.

Ta có: $\begin{cases} SB \perp MN \\ SB \perp AM \end{cases} \Rightarrow SB \perp (AMN) \Rightarrow SB \perp AN$

8. Cho điểm S không thuộc mặt phẳng (α) có hình chiếu trên (α) là điểm H. Với điểm M bất kì trên (α) và M không trùng với H, ta gọi SM là đường xiên và đoạn HM là hình chiếu của đường xiên đó. Chứng minh rằng:

a) Hai đường xiên bằng nhau khi và chỉ khi hai hình chiếu của chúng bằng nhau;

b) Với hai đường xiên cho trước, đường xiên nào lớn hơn thì có hình chiếu lớn hơn và ngược lại đường xiên nào có hình chiếu lớn hơn thì lớn hơn.

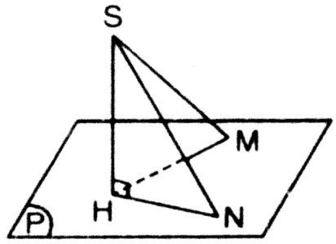
Giải

a) Giả sử HM, HN lần lượt là hình chiếu của SM, SN.

Nếu SM = SN thì $\Delta SHM = \Delta SHN$ nên HM = HN

Ngược lại nếu HM = HN thì $\Delta SHM = \Delta SHN$ nên SM = SN.

Vậy SM = SN $\Leftrightarrow$ HM = HN



b) Áp dụng định Py-ta-go ta có:

$SM^2 - HM^2 = SN^2 - HN^2 \ (= SH^2)$

$\Rightarrow SM^2 - SN^2 = HM^2 - HN^2$.

Từ đó suy ra: SM > SN $\Leftrightarrow$ HM > HN (đpcm).

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

b) Từ đó suy ra nếu một tứ diện có hai cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

2. Cho tứ diện SABC có ABC là tam giác vuông cân đỉnh B, AB = a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. M là điểm tùy ý trên cạnh AB, đặt AM = x ($0 < x < a$). Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB.

a) Tìm thiết diện của tứ diện SABC với (α).

b) Tính diện tích thiết diện này theo a và x. Tìm x để diện tích thiết diện có giá trị lớn nhất.

Đáp số: b) $S = \sqrt{3}x(a - x)$, S lớn nhất khi $x = \dfrac{a}{2}$.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = a.

a) Tìm trên mặt phẳng (ABCD) một điểm cách đều ba điểm S, B, C và tính khoảng cách từ điểm đó đến mặt phẳng (SBC).

b) Tìm trên mặt phẳng (SBC) một điểm cách đều ba điểm B, C, M với M là trung điểm cạnh CD. Tính khoảng cách chung ấy.

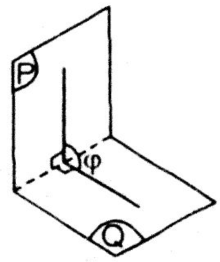
Đáp số: a) Trung điểm N của cạnh AD và có độ dài $SN = BN = CN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

b) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Góc giữa hai mặt phẳng



Định nghĩa: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

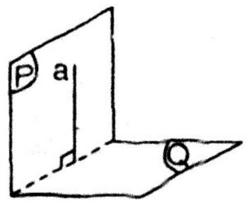
Định lí: Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') thì $S' = S\cos\varphi$, trong đó φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P').

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa: Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0. Kí hiệu $(P) \perp (Q)$.

Định lí (Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc)

Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.



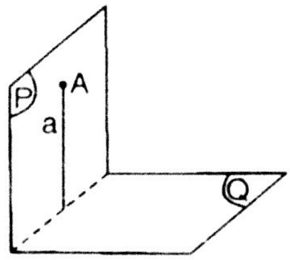
$$\begin{cases} a \subset (P) \\ a \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q)$$

Định lí: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với giao tuyến của (P) và (Q) đều vuông góc với mặt phẳng (Q).

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = d;\ (P) \perp (Q) \\ a \subset (P) \\ a \perp d \end{cases} \Rightarrow a \perp (Q)$$

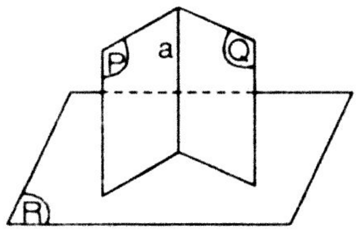
Hệ quả 1: Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (P) thì đường thẳng a đi qua điểm A và vuông góc với (Q) sẽ nằm trong (P).

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ A \in (P) \\ a \perp (Q) \\ A \in a \end{cases} \Rightarrow a \subset (P)$$



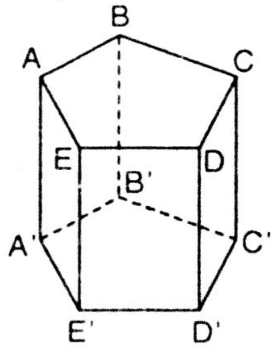
Hệ quả 2: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a \\ (P) \perp (R) \\ (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$



Hệ quả 3: Qua đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) có duy nhất một mặt phẳng (Q) vuông góc với mặt phẳng (P).

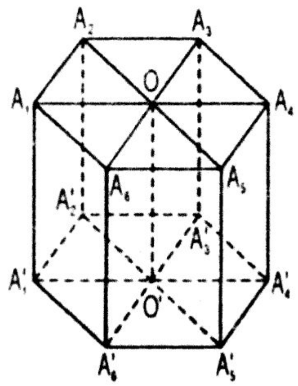
3. Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương



Định nghĩa:

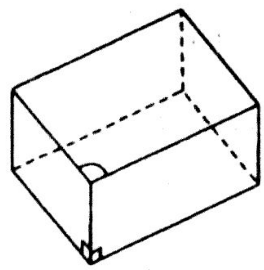
Hình lăng trụ đứng:

Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.



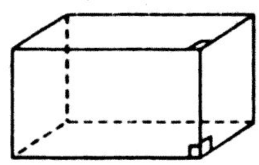
Hình lăng trụ đều:

Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.



Hình hộp đứng:

Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.

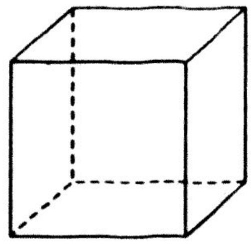


Hình hộp chữ nhật:

Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.

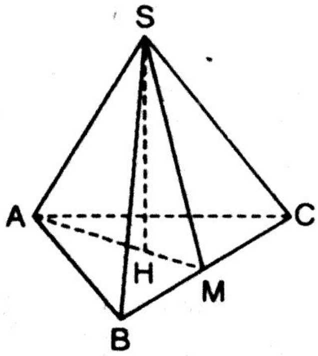
Hình lập phương:

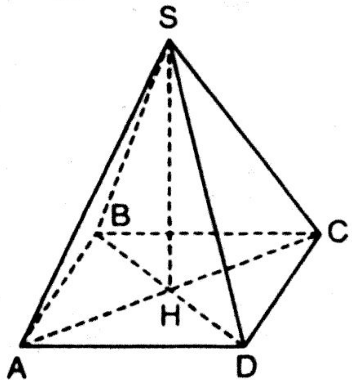
Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.

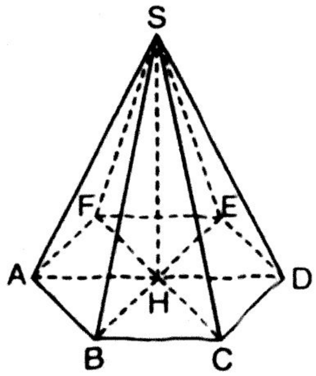


4. Hình chóp đều và hình chóp cụt đều

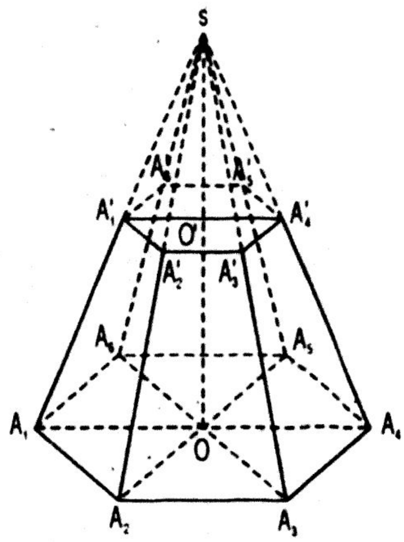
Định nghĩa: Một hình chóp được gọi là hình chóp đều nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.







Định nghĩa: Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cụt thì hình chóp cụt đó được gọi là hình chóp cụt đều.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Cho ba mặt phẳng (α), (β), (γ), những mệnh đề nào sau đây đúng ?

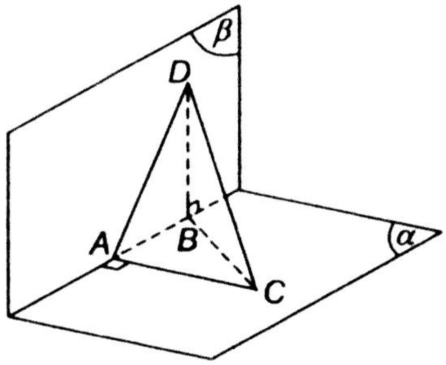
a) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) \mathbin{/\!/} (\gamma)$ thì $(\beta) \perp (\gamma)$.

b) Nếu $(\alpha) \perp (\beta)$ và $(\alpha) \perp (\gamma)$ thì $(\beta) \mathbin{/\!/} (\gamma)$.

Trả lời: a) Đúng; b) Sai.

2. Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Người ta lấy trên giao tuyến Δ của hai mặt phẳng đó hai điểm A và B sao cho AB = 8 cm. Gọi C là một điểm trên (α) và D là một điểm trên (β) sao cho AC và BD cùng vuông góc với giao tuyến Δ và AC = 6 cm, BD = 24 cm. Tính độ dài đoạn CD.

Giải



$(\alpha) \perp (\beta)$ và $CA \perp \Delta \Rightarrow CA \perp (\beta)$

$\Rightarrow$ $CA \perp DA$ nên ΔADC vuông ở A.

$DB \perp \Delta$

$\Rightarrow$ $DB \perp AB \Rightarrow \Delta BAD$ vuông ở B.

Do đó: $CD^2 = AD^2 + AC^2 = BD^2 + AB^2 + AC^2$

$= 24^2 + 8^2 + 6^2 = 676$

$\Rightarrow$ $CD = 26$ (cm).

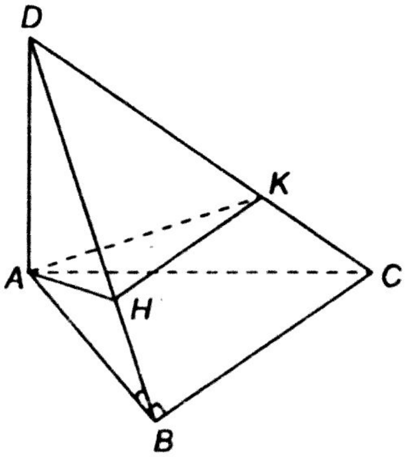
3. Trong mặt phẳng (α) cho tam giác ABC vuông ở B. Một đoạn thẳng AD vuông góc với (α) tại A. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ABD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

b) Mặt phẳng (ABD) vuông góc với mặt phẳng (BCD).

c) HK // BC với H và K lần lượt là giao điểm của DB và DC với mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với DB.

Giải



a) Ta có: $AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC$,

mà $BC \perp AB$ nên $BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp BD$.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ BD \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABD}$ là

góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC).

b) Vì $BC \perp (ABD)$ nên $(BCD) \perp (ABD)$.

c) $DB \perp (AHK)$ tại H nên $DB \perp HK$.

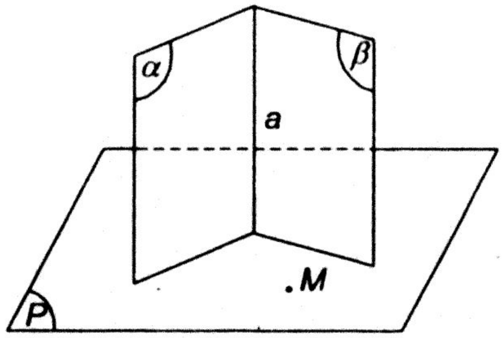
Trong mặt phẳng (BCD) ta có $HK \perp BD$ và $BC \perp BD$ do đó HK // BC.

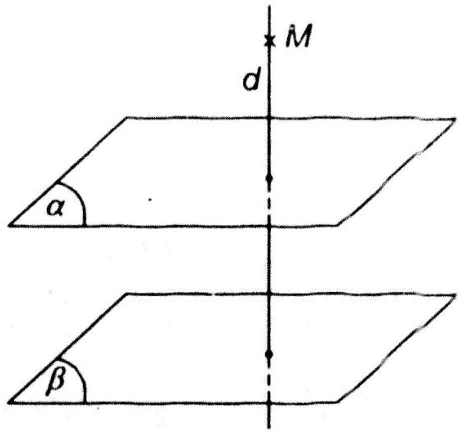
4. Cho hai mặt phẳng (α), (β) cắt nhau và một điểm M không thuộc (α) và không thuộc (β). Chứng minh rằng qua điểm M có một và chỉ một mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β). Nếu (α) song song với (β) thì kết quả trên sẽ thay đổi như thế nào ?

Giải

Gọi $a = (\alpha) \cap (\beta)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với a.

Vì $a \subset (\alpha)$ và $a \perp (P)$ nên $(P) \perp (\alpha)$. Tương tự ta chứng minh được $(P) \perp (\beta)$. Như vậy qua điểm M có mặt phẳng (P) vuông góc với (α) và (β).





Ngược lại nếu có mặt phẳng (P) đi qua điểm M và (P) vuông góc với (α) và (β) thì ta suy ra (P) ⊥ a. Do tính duy nhất của mặt phẳng đi qua một điểm M và vuông góc với đường thẳng a nên mặt phẳng (P) là duy nhất.

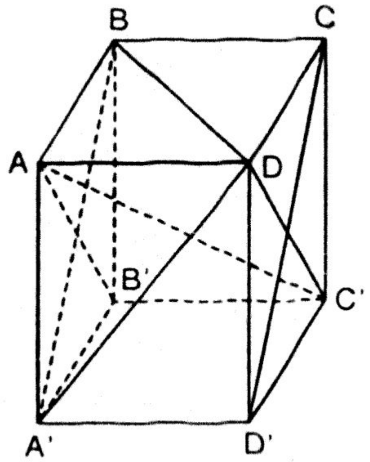
Nếu (α) // (β), ta gọi d là đường thẳng đi qua M và vuông góc với (α). Khi đó ta có d ⊥ (β) và mọi mặt phẳng (P) chứa d đều vuông góc với (α) và (β). Vậy khi (α) // (β) có vô số mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với (α) và (β).

5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (AB'C'D) vuông góc với mặt phẳng (BCD'A').

b) Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng (A'BD).

Giải



a) Ta có AB' ⊥ A'B (hai đường chéo hình vuông)

AB' ⊥ BC (vì BC ⊥ (ABB'A')

⇒ AB' ⊥ (BCD'A')

Mà AB' ⊂ (AB'C'D) nên (AB'C'D) ⊥ (BCD'A')

b) Ta có $\begin{cases} A'B \perp AB' \\ A'B \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow A'B \perp (ADC'B')$

Mà AC' ⊂ (ABC'B') nên AC' ⊥ A'B (1)

Tương tự A'D ⊥ (ABC'D') ⇒ A'D ⊥ AC' (2)

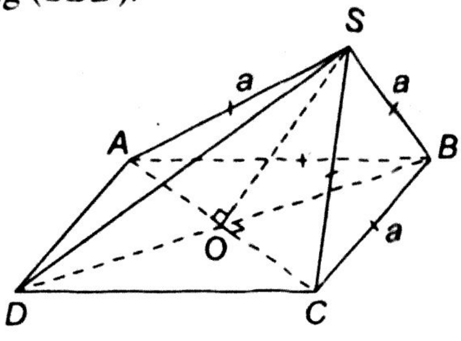
Từ (1) và (2) suy ra AC' ⊥ (A'BD).

6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi cạnh a và có SA = SB = SC = a. Chứng minh rằng:

a) Mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).

b) Tam giác SBD là tam giác vuông.

Giải



a) Gọi O là tâm hình thoi ABCD.

Ta có: $\left.\begin{matrix} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{matrix}\right\}$

$\Rightarrow AC \perp (SBD)$

$\Rightarrow (ABCD) \perp (SBD)$

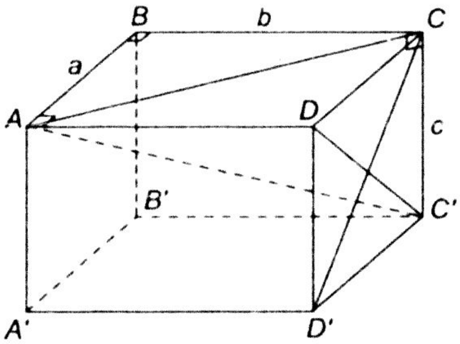
b) Vì SA = SB = SC = a và AB = BC = a nên ba tam giác SAC, BAC, DAC cân và bằng nhau. Do đó OS = OB = OD.

Từ đó suy ra SBD là tam giác vuông tại S.

7. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a) Chứng minh rằng mặt phẳng (ADC'B') vuông góc với mặt phẳng (ABB'A').

b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c.



Giải

a) Vì $\left.\begin{array}{l} AD \perp AB \\ AD \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (ABB'A')$

Mặt phẳng (ADC'B') chứa AD nên ta suy ra $(ADC'B') \perp (ABB'A')$

b) Ta có $AC'^2 = AC^2 + CC'^2$ ($\Delta ACC'$ vuông)

$AC'^2 = AB^2 + BC^2 + CC'^2$ (ΔABC vuông)

$AC'^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

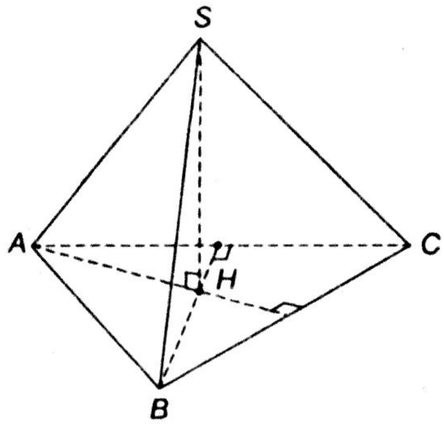
Vậy $AC' = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

8. Tính độ dài đường chéo của một hình lập phương cạnh a.

Giải

Áp dụng kết quả bài 7b với a = b = c ta có độ dài đường chéo hình lập phương $AC' = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$

9. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có SH là đường cao. Chứng minh $SA \perp BC$ và $SB \perp AC$.



Giải

Vì H là tâm của tam giác đều nên ta có:

$BC \perp AH$ và $BC \perp SH$.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SA$

Tương tự ta có $\left.\begin{array}{l} AC \perp BH \\ \text{và } AC \perp SH \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (SBH) \Rightarrow AC \perp SB$.

10. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a. Gọi O là tâm của hình vuông ABCD.

a) Tính độ dài đoạn thẳng SO.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn SC. Chứng minh hai mặt phẳng (MBD) và (SAC) vuông góc với nhau.

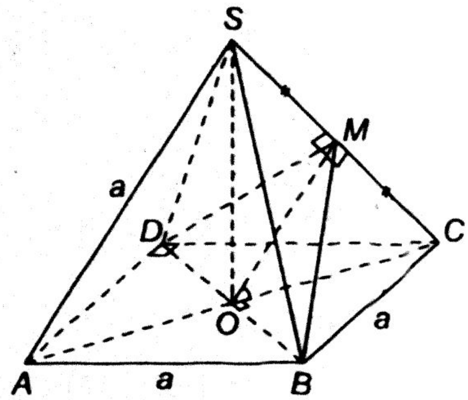
c) Tính độ dài đoạn OM và tính góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Giải

a) Ta có tứ giác ABCD là hình vuông có cạnh bằng a và $SO \perp (ABCD)$. Do đó:

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$



b) SBC là tam giác đều cạnh a nên $BM \perp SC$, tương tự $DM \perp SC$

$$\left.\begin{array}{l} BM \perp SC \\ DM \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (BDM)$$

Do đó $(SAC) \perp (BDM)$.

c) $OM^2 = OC^2 - MC^2$ vì OMC là tam giác vuông tại M.

$OM^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$. Vậy $OM = \frac{a}{2}$.

Vì $MO \perp BD$ và $CO \perp BD$ với BD là giao tuyến của (MBD) và (ABCD) nên $\widehat{MOC}$ là góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD).

Tam giác MOC là vuông tại M nên:

$$\sin\widehat{MOC} = \frac{MC}{OC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{MOC} = 45^0$$

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABCD) bằng 45^0.

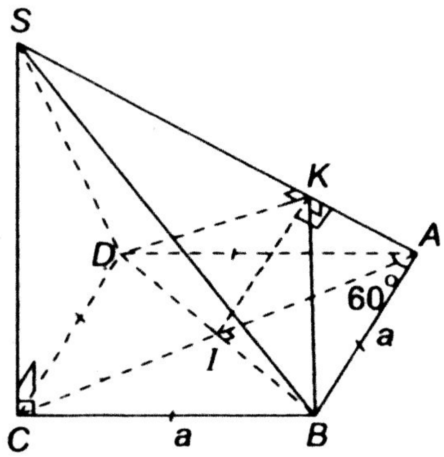
11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60^0, cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

a) Chứng minh mặt phẳng (SBD) vuông góc với mặt phẳng (SAC).

b) Trong tam giác SCA kẻ IK vuông góc với SA tại K. Hãy tính độ dài IK.

c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^0$ và từ đó suy ra mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SAD).

Giải



a) Vì $BD \perp AC$ và $BD \perp SC$ nên $BD \perp (SAC)$. Ta suy ra $(SBD) \perp (SAC)$.

b) Hình thoi ABCD được tạo thành bởi hai tam giác đều chung đáy. Hai tam giác vuông SCA và IKA có chung góc A nên đồng dạng, ta có:

$$\frac{IK}{SC} = \frac{AI}{AS} \qquad (1)$$

Theo định lí Py-ta-go ta có:

$$SA^2 = SC^2 + CA^2 = \frac{6a^2}{4} + \left(a\sqrt{3}\right)^2 = \frac{18a^2}{4} \Rightarrow SA = \frac{3\sqrt{2}}{2}a \text{ thay vào (1)}$$

ta được $IK = \dfrac{SC.AI}{SA} = \dfrac{\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a} = \dfrac{a}{2}$.

c) Vì $IK = IB = ID = \dfrac{a}{2}$ nên ΔBKD là tam giác vuông tại K hay $\widehat{BKD} = 90^o$.

$$\left.\begin{array}{l} SA \perp DB \\ SA \perp IK \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp (BDK) \Rightarrow SA \perp BK \text{ và } SA \perp DK.$$

Vậy $\widehat{BKD}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) và $\widehat{BKD} = 90^o$ nên ta suy ra $(SAB) \perp (SAD)$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh B và AB = a, đoạn SA vuông góc với (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của SC và SB, M là một điểm trên đoạn AB. Đặt AM = x ($0 \le x \le a$). Gọi α là mặt phẳng chứa EM và vuông góc với (SAB).

a) Hãy xác định mặt phẳng a và thiết diện của tứ diện SABC với α.

b) Chứng minh $FM = \sqrt{x^2 - ax + a^2}$. Tính diện tích của thiết diện theo a và x.

2. Cho tam giác đều ABC cạnh a, I là trung điểm của BC, D là điểm đối xứng của A qua I. Dựng đoạn $SD = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ vuông góc với (ABC).

Chứng minh:

a) mp(SAB) $\perp$ mp(SAC)

b) mp(SBC) $\perp$ mp (SAD)

3. Cho hai tam giác ACD và BCD nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau, AC = AD = BC = a và CD = 2x. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh rằng IJ vuông góc với AB và IJ vuông góc với CD.

b) Tính AB và IJ theo a và x.

c) Xác định x sao cho (ABC) vuông góc với (ABD).

§5. KHOẢNG CÁCH

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa 1

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (P) (hoặc đến đường thẳng Δ) là khoảng cách giữa hai điểm M và H trong đó H là hình chiếu của điểm M trên mặt phẳng (P) (hoặc trên đường thẳng Δ).

2. Định nghĩa 2

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a là khoảng cách từ một điểm nào đó của a đến mặt phẳng (P).

3. Định nghĩa 3

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

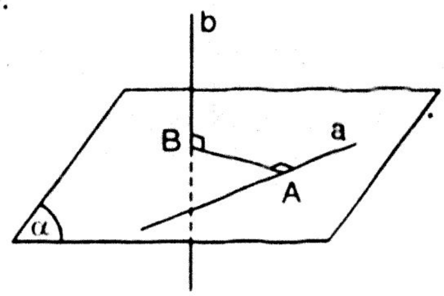
4. Định nghĩa 4

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

**** Cách tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau***

a) Giả sử a và b là hai đường chéo nhau và a $\perp$ b.

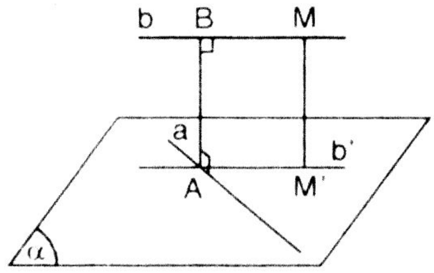
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B.
- Trong (α) dựng BA $\perp$ a tại A, ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



b) Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

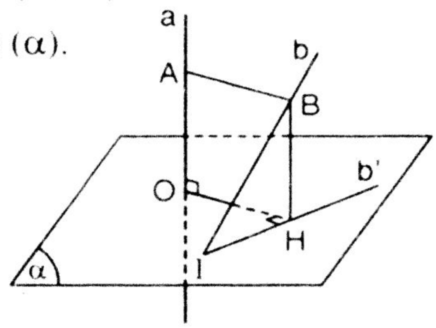
Cách 1:

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b.
- Lấy một điểm M tùy ý trên b dựng MM′ ⊥ (α) tại M′:
- Từ M′ dựng b′ // b cắt a tại A.
- Từ A dựng AB // MM′ cắt b tại B, độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.



Cách 2:

- Ta dựng mặt phẳng (α) ⊥ a tại O, (α) cắt b tại I.
- Dựng hình chiếu vuông góc của b là b′ trên (α).
- Trong mặt phẳng (α), vẽ OH ⊥ b′, H ∈ b′.
- Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B.
- Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A.



Độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

a) Đường thẳng Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng a và b nếu Δ vuông góc với a và Δ vuông góc với b.

b) Gọi (P) là mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng a, b chéo nhau. Khi đó đường vuông góc chung Δ của a và b luôn luôn vuông góc với (P).

c) Gọi Δ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b thì Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (a, Δ) và (b, Δ).

d) Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Đường thẳng nào đi qua một điểm M trên a đồng thời cắt b tại N và vuông góc với b thì đó là đường vuông góc chung của a và b.

e) Đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng chéo nhau a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

Trả lời: a) Sai; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai; e) Sai.

2. Cho tứ diện S.ABC có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.

b) Chứng minh rằng SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và HK vuông góc với mặt phẳng (SBC).

c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

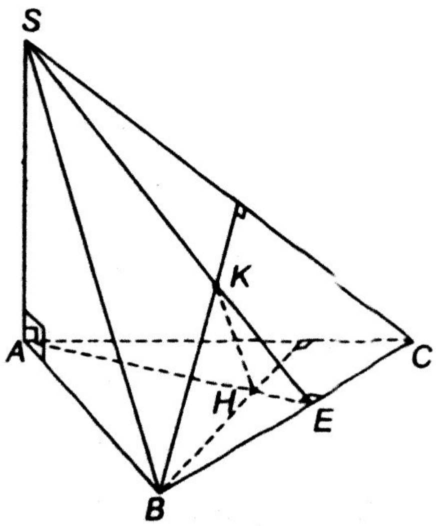
Giải

a) Gọi E là giao điểm của AH và BC.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

$$\begin{cases} BC \perp AE \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp SE.$$

Vậy ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy tại E.



b) Ta có: $\begin{cases} SA \perp BH \\ AC \perp BH \end{cases} \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$

Ta có $\begin{cases} SC \perp BH \\ SC \perp BK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (BHK).$

$SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$; $BC \perp (SAE)$

$\Rightarrow BC \perp HK$

Từ $\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC)$

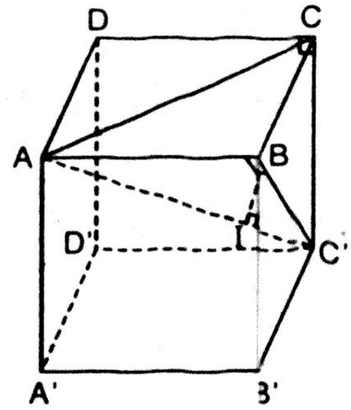
c) Ta có $AE \perp SA$ và $AE \perp BC$

nên AE là đường vuông góc chung của SA và BC.

3. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Chứng minh rằng các khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau. Tính khoảng cách đó.

Giải

ABC' là tam giác vuông tại B có AB = a và $BC' = a\sqrt{2}$. Độ dài đường cao BI là khoảng cách từ B tới đường thẳng AC'. Do đó:



$$\frac{1}{BI^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2}$$

$$\Rightarrow BI = a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Khoảng cách từ các điểm B, C, D, A', B', D' đến đường chéo AC' đều bằng nhau vì chúng đều là độ dài đường cao của các tam giác vuông bằng nhau (vì có hai cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau).

4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c.

a) Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (ACC'A').

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'.

Giải

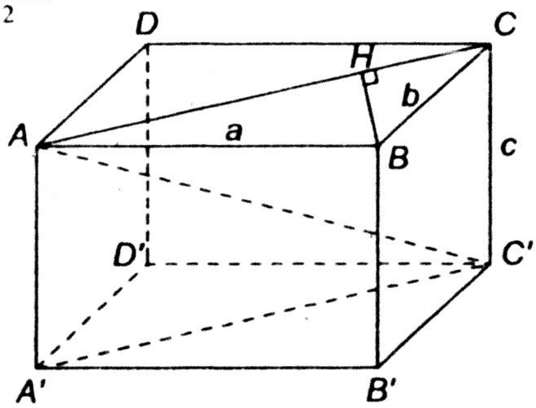
a) Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ $BH \perp AC$ tại H thì $BH \perp (ACC'A')$..

(vì $BH \perp AC$ và $BH \perp CC'$).

Khi đó BH là khoảng cách từ B tới mặt phẳng (ACC'A'). Xét tam giác vuông ABC ta có:

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}.$$

$$\Rightarrow BH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



b) Mặt phẳng (ACC'A') chứa AC' và song song với BB' nên khoảng cách giữa BB' và AC' chính là khoảng cách $BH = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'

a) Chứng minh rằng B'D vuông góc với mặt phẳng (BA'C').

b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD').

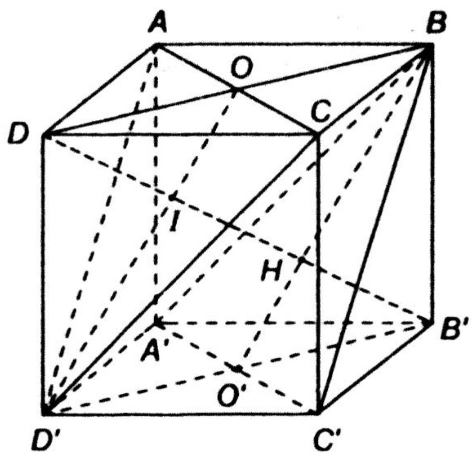
c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD'.

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} A'C' \perp B'D' \\ A'C' \perp DD' \end{cases} \Rightarrow A'C' \perp (BB'D'D) \Rightarrow A'C' \perp DB'$

$$\begin{cases} BC' \perp B'C \\ BC' \perp DC \end{cases} \Rightarrow BC' \perp (DCB'A') \Rightarrow BC' \perp DB'$$

Từ $\begin{cases} DB' \perp A'C' \\ DB' \perp BC' \end{cases} \Rightarrow DB' \perp (BA'C')$



b) Hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD') có

$$\begin{cases} BC' // AD' \\ A'C' // AC \end{cases} \Rightarrow (BA'C') // (ACD')$$

Gọi I và H lần lượt là giao điểm của DB' với D'O và BO'. Trong hình chữ nhật DBB'D' ta có

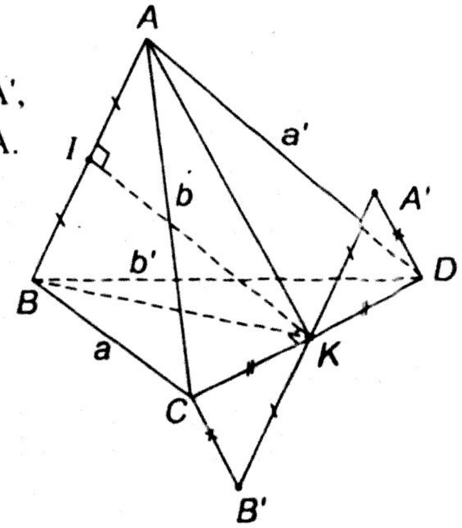
$DI = \frac{1}{2}IB'$ và $B'H = \frac{1}{2}DH$ nên $DI = IH = HB' = \frac{1}{3}DB' \Rightarrow IH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy khoảng cách giữa hai mặt phẳng (BA'C') và (ACD') là $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau BC' và CD' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (BA'C') và (ACD') lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau đó. Ta suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' là $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

6. Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối trung điểm hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD và AD = BC.

Giải



Gọi I, K lần lượt là trung điểm của cạnh AB và CD. Qua K kẻ đường thẳng d // AB, trên d lấy A', B' sao cho K là trung điểm của A'B' và KA' = IA.

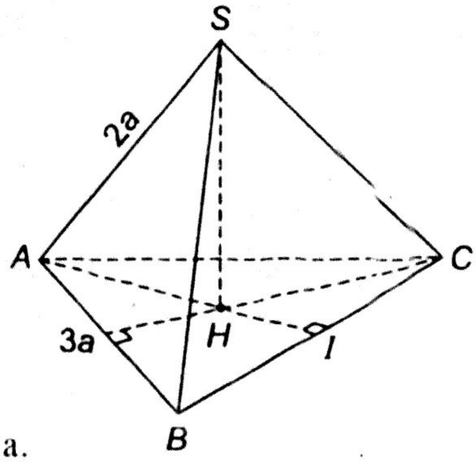
Ta có $B'C = A'D$ (vì $\Delta KB'C = \Delta KA'D$).

Vì $BB' // AA' // IK$ mà IK là đường vuông góc chung của AB và CD nên $BB' \perp B'C$ và $AA' \perp A'D$. Hai tam giác vuông BCB' và ADA' có $BB' = AA'$ và $CB' = A'D$ nên ta suy ra AD = BC.

Chứng minh tương tự ta có AC = BD.

7. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 3a, cạnh bên bằng 2a. Tính khoảng cách từ S tới mặt đáy (ABC).

Giải



Gọi H là tâm của tam giác đều ABC. Khoảng cách từ S tới mp(ABC) bằng độ dài đường cao SH của hình chóp.

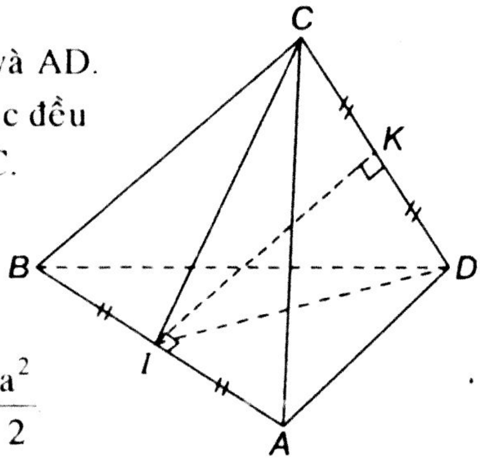
Gọi I là giao điểm AH và BC

$$AH = \frac{2}{3}AI = = \frac{2}{3}.3a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

$$SH^2 = SA^2 - AH^2 = 4a^2 - 3a^2 = a^2 \Rightarrow SH = a.$$

8. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Tính khoảng cách giữa hai cạnh đối của tứ diện đều đó.

Giải



Gọi I và K lần lượt là các trung điểm của BC và AD.
Ta có IA = ID (hai trung tuyến của hai tam giác đều bằng nhau), do đó $IK \perp AD$. Tương tự $IK \perp BC$.
Vậy IK là đường vuông góc chung của hai cạnh đối diện AD và BC của tứ diện đều.
Tam giác AIK vuông tại K nên:

$$IK^2 = AI^2 - AK^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{2a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Trong hai mặt phẳng vuông góc (P) và (Q) cho hai tam giác cân ACD và BCD có chung đáy CD = 2x và các cạnh khác có độ dài a. Gọi M và N là trung điểm của AB và CD.

a) Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của AB và CD.

b) Tính theo a và x độ dài các đoạn AB và MN.

2. Tứ diện OABC có OA = OB = OC = a và $\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = 60^0$; $\widehat{BOC} = 90^0$.

a) Tính độ dài các cạnh còn lại của tứ diện và chứng minh rằng ABC là tam giác vuông.

b) Chứng minh $OA \perp BC$, gọi I, J lần lượt là trung điểm của OA và BC, chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của OA và BC.

c) Chứng minh rằng $(ABC) \perp (BOC)$. Tính độ dài đoạn IJ theo a.

BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III

1. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

a) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

c) Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng b mà b vuông góc với đường thẳng a, thì a song song với (α).

d) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song.

e) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song.

Trả lời: a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai; e) Sai.

2. Trong các điều khẳng định sau đây, điều nào là đúng ?

a) Khoảng cách của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

b) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác.

c) Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng khác.

d) Đường thẳng nào vuông góc với cả hai đường thẳng chéo nhau cho trước là đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Trả lời: a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Sai.

3. Hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông ABCD cạnh a, cạnh SA = a và vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

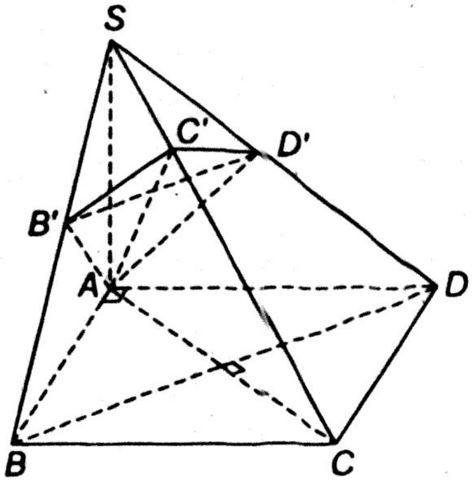
a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB, SC, SD tại B', C', D'. Chứng minh B'D' song song với BD và AB' vuông góc với SB.

Giải

a) Vì cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) nên $SA \perp AD$ và $SA \perp AB$. Theo định lí ba đường vuông góc, vì $CD \perp AD$ nên $CD \perp SD$ và vì $BC \perp AB$ nên $BC \perp SB$. Vậy bốn mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.

b) $\left.\begin{matrix} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{matrix}\right\} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$



Mặt khác vì $(\alpha) \perp SC$ nên $B'D' \perp SC$.

Hai đường thẳng BD và B'D' cùng nằm trong mặt phẳng (SBD) và cùng vuông góc với SC. Vì SC không vuông góc với (SBD) nên hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SBD) sẽ vuông góc với BD và B'D'. Ta suy ra $BD // B'D'$.

Ta có $\left.\begin{matrix} BD \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AB' \\ SC \perp (\alpha) \quad \Rightarrow SC \perp AB' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB.$

4. Hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a và có góc $\widehat{BAD} = 60^o$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC, F là trung điểm của đoạn BE.

a) Chứng minh mặt phẳng (SOF) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC).

Giải

a) Vì BCD là tam giác đều nên $DE \perp BC$. Do đó $OF \perp BC$.

Mặt khác vì $SO \perp (ABCD)$ nên $SO \perp BC$. Ta suy ra $BC \perp (SOF)$, do đó $(SBC) \perp (SOF)$.

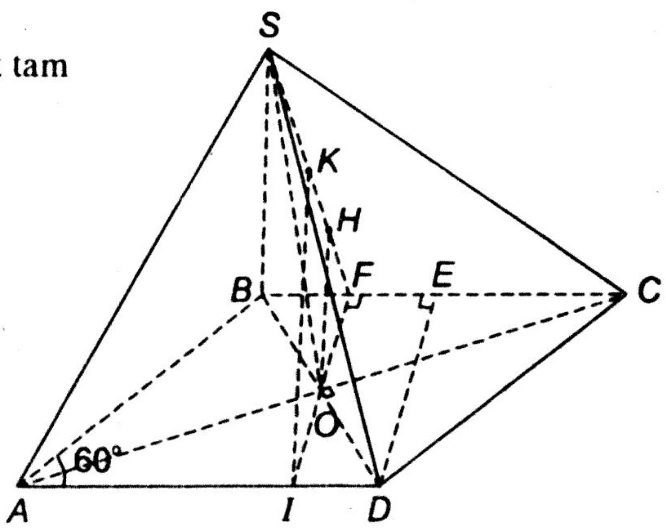
b) Trong mặt phẳng (SOF) dựng $OH \perp SF$ thì $OH \perp (SBC)$. Xét tam giác SOF vuông tại O ta có

$$OF = \frac{DE}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

và có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OF^2} + \frac{1}{OS^2}$

$$= \frac{16}{3a^2} + \frac{16}{9a^2} = \frac{64}{9a^2}$$

$$\Rightarrow OH = \frac{3a}{8}.$$



Do đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) là $OH = \frac{3a}{8}$.

Gọi $I = FO \cap AD$. Trong mặt phẳng (SIF) dựng $IK \perp SF$. Vì AD // (SBC) nên khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) chính là khoảng cách từ I trên AD đến mặt phẳng (SBC). Đó chính là độ dài đoạn IK.

Ta có $IK = 2OH = \frac{3a}{4}$.

5. Tứ diện ABCD có hai mặt ABC và ADC nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Tam giác ABC vuông tại A có AB = a, AC = b. Tam giác ADC vuông tại D có CD = a.

a) Chứng minh các tam giác BAD và BDC là các tam giác vuông.

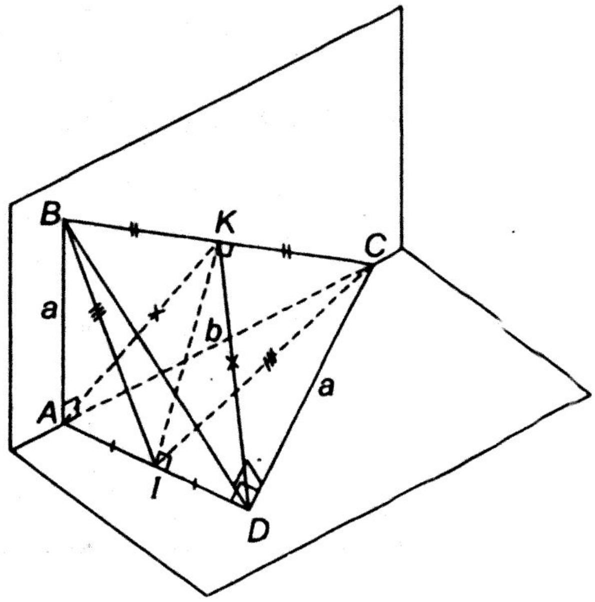
b) Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC.

Giải

a) Theo giả thiết $(ABC) \perp (ADC)$ và $BA \perp AC$ nên ta có $BA \perp (ADC)$. Do đó tam giác BAD vuông tại A.

Theo định lí ba đường vuông góc ta có $BA \perp (ACD)$, $AD \perp DC$ nên $BD \perp DC$ hay BDC là tam giác vuông tại D.

b) Ta có $\left.\begin{array}{l} KA = \dfrac{BC}{2} \\ KD = \dfrac{BC}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow KA = KD$



Tam giác AKD cân tại K nên ta có $KI \perp AD$. (1)

Mặt khác hai tam giác vuông ABD và DCA bằng nhau vì có AD chung và có AB = DC = a nên ta suy ra IB = IC. Tam giác IBC cân tại I nên ta có $IK \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra IK là đoạn vuông góc chung của đường thẳng AD và BC.

6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a.

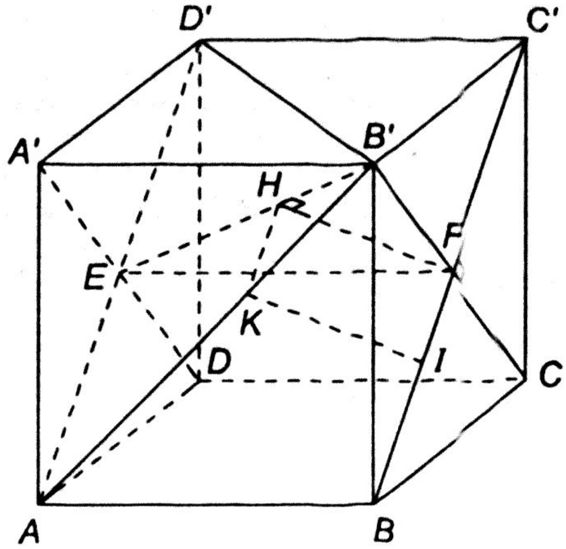
a) Chứng minh BC' vuông góc với mặt phẳng (A'B'CD).

b) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC'.

Giải

a) Ta có $B'C \perp BC'$ và $A'B' \perp BC'$ vì $A'B' \perp (BB'C'C)$.

Do đó: $BC' \perp (A'B'CD)$.



b) Mặt phẳng (AB'D') chứa AB' và song song với BC'. Cần tìm hình chiếu của BC' trên mặt phẳng này.

Gọi E, F lần lượt là tâm các hình vuông ADD'A' và BCC'B'. Trong mặt phẳng (A'B'CD) kẻ $FH \perp EB'$ $(H \in EB')$ nên theo câu a, khi đó $FH \perp BC'$ hay $FH \perp AD'$. Vậy $FH \perp (AB'D')$. Do đó hình chiếu của BC' trên mặt phẳng $(AB'D')$ là đường thẳng đi qua H và song song với BC'.

Đường thẳng đó cắt AB' tại K. Từ K ta vẽ KI song song với HF cắt BC' tại I. Ta có IK là đường vuông góc chung của AB' và BC'. Xét tam giác vuông EFB' ta có:

$$\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{FE^2} + \frac{1}{FB'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{a^2}.$$

Ta tính được $KI = FH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Chú ý: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB' và BC' bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (AB'D') và (BDC') lần lượt chứa hai đường thẳng chéo nhau đó. Khoảng cách này bằng $\frac{1}{3}$ độ dài đường chéo A'C. (Bài tập 5, §5)

7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi ABCD cạnh a có góc $\widehat{BAD} = 60^0$ và $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABCD) và độ dài cạnh SC.

b) Chứng minh mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

c) Chứng minh SB vuông góc với BC.

d) Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD). Tính tanφ.

Giải

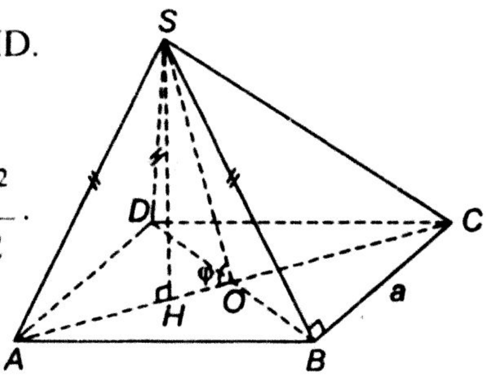
a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABCD).

Vì $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ nên HA = HB = HD.

Vậy H là trọng tâm của tam giác đều ABD.

Ta có $SH^2 = SA^2 - AH^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{3} = \frac{5a^2}{12}$.

$\Rightarrow \quad SH = \frac{a\sqrt{15}}{6}$.



Mặt khác $CH = CO + OH = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$.

Xét tam giác vuông SHC ta có: $SC^2 = SH^2 + HC^2 = \frac{5a^2}{12} + \frac{4a^2}{3} = \frac{7a^2}{4}$.

Vậy $SC = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

b) Ta có $H \in AC$, do đó $SH \subset (SAC)$.

Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $(SAC) \perp (ABCD)$.

c) Ta có $SB^2 + BC^2 = \frac{3a^2}{4} + a^2 = \frac{7a^2}{4} = SC^2$. Vậy tam giác SBC vuông tại B hay $SB \perp BC$.

d) Ta có $OH \perp BD$ và $OS \perp BD$ nên $\varphi = \widehat{SOH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (ABCD). Khi đó: $\tan\varphi = \frac{SH}{HO} = \frac{a\sqrt{15}}{6} \cdot \frac{6}{a\sqrt{3}} = \sqrt{5}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM CHƯƠNG III

1. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

(A) Từ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{BA} = -3\overrightarrow{CA}$.

(B) Từ $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ ta suy ra $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AC}$.

(C) Vì $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

(D) Nếu $\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ thì B là trung điểm của đoạn AC.

Trả lời: $\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AD}$ nên A, B, C, D đồng phẳng. (Chọn C).

2. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

(A) Vì $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \vec{0}$ nên N là trung điểm của đoạn MP.

(B) Vì I là trung điểm của đoạn AB nên từ một điểm O bất kì ta có $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$.

(C) Từ hệ thức $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - 8\overrightarrow{AD}$ ta suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

(D) Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$ nên bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một mặt phẳng.

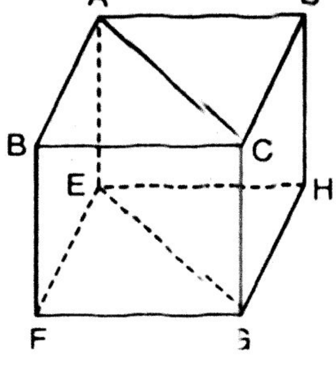
Trả lời: Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$ luôn đúng với mọi A, B, C, D. Chọn (D).

3. Trong các kết quả sau đây, kết quả nào đúng ?

Cho hình lập phương ABCD.EFGH có cạnh bằng a.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng

(A) a^2;   (B) $a^2\sqrt{2}$;



(C) $a^2\sqrt{3}$; (D) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Trả lời: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 45^0 = a.a\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = a^2$. Chọn (A).

4. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

(A) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

(B) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì a vuông góc với c.

(C) Cho ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một. Nếu có một đường thẳng d vuông góc với a thì d song song với b hoặc c.

(D) Cho hai đường thẳng a và b song song với nhau. Một đường thẳng c vuông góc với a thì c vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (a, b).

Trả lời: (A), (C), (D) sai. Chọn (B).

5. Trong các mệnh đề sau đây hãy tìm mệnh đề đúng.

(A) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

(B) Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng thuộc mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

(C) Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến d. Với mỗi điểm A thuộc (α) và mỗi điểm B thuộc (β) thì ta có đường thẳng AB vuông góc với d.

(D) Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) đều vuông góc với mặt phẳng (γ) thì giao tuyến d của (α) và (β) nếu có sẽ vuông góc với (γ).

Trả lời: (A), (B), (C) sai. Chọn (D).

6. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

(A) Hai đường thẳng a và b trong không gian có các vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Điều kiện cần và đủ để a và b chéo nhau là a và b không có điểm chung và hai vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ không cùng phương.

(B) Cho a, b là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau. Đường vuông góc chung của a và b nằm trong mặt phẳng chứa đường này và vuông góc với đường kia.

(C) Không thể có một hình chóp tứ giác S.ABCD nào có hai mặt bên (SAB) và (SCD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy.

(D) Cho $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ chỉ phương của hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng (α) và $\vec{n}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ. Điều kiện cần và đủ để $\Delta \perp (\alpha)$ là $\vec{n} . \vec{u} = 0$ và $\vec{n} . \vec{v} = 0$.

Trả lời: (A), (B), (D) đúng. Chọn (C).

7. Trong các mệnh đề sau đây mệnh đề nào là đúng ?

(A) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

(B) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cắt nhau cho trước thì cả ba đường thẳng đó cùng nằm trong một mặt phẳng.

(C) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một thì cùng nằm trong một mặt phẳng.

(D) Ba đường thẳng cắt nhau từng đôi một và không nằm trong một mặt phẳng thì đồng quy.

Trả lời: (A), (B), (C) sai. Chọn (D).

8. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.

(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.

(D) Hai đường thẳng không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.

Trả lời: (B), (C), (D) sai. Chọn (A).

9. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là đúng ?

(A) Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

(B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì cắt nhau.

(C) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.

(D) Một mặt phẳng (α) và một đường thẳng a không thuộc (α) cùng vuông góc với đường thẳng b thì (α) song song với a.

Trả lời: (A), (B), (C) sai. Chọn (D).

10. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

(A) Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn ngắn nhất trong các đoạn thẳng nối hai điểm bất kì lần lượt nằm trên hai đường thẳng ấy và ngược lại.

(B) Qua một điểm cho trước có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

(C) Qua một điểm cho trước có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

(D) Cho ba đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi một. Khi đó ba đường thẳng này sẽ nằm trong ba mặt phẳng song song với nhau từng đôi một.

Trả lời: (B), (C), (D) sai. Chọn (A).

11. Khoảng cách giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a bằng kết quả nào trong các kết quả sau đây:

(A) $\frac{3a}{2}$; (B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; (D) $a\sqrt{2}$.

Trả lời: Xem bài tập 8 mục §5 chương III. Chọn (B).

BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm A(1; 1), B(0; 3), C(2; 4). Xác định ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình sau:

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (2; 1)$.

b) Phép đối xứng qua trục Ox.

c) Phép đối xứng qua tâm I(2; 1)

d) Phép quay tâm O góc 90^{o}.

e) Phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép đối xứng qua trục Oy và phép vị tự tâm O tỉ số k = −2.

Giải

Gọi tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác ABC qua các phép biến hình trên.

a) Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = 1 + y \end{cases}$

Ảnh của A, B, C qua $T_{\vec{v}}$ lần lượt là A'(3; 2), B'(2; 4), C'(4; 5).

b) Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$

A'(1; −1), B'(0; −3), C'(2; −4).

c) Biểu thức tọa độ $\begin{cases} x' = 4 - x \\ y' = 2 - y \end{cases}$

A'(3; 1), B'(4; −1), C'(2; −2).

d) Vẽ hình ta được A'(–1; 1), B'(–3; 0), C'(–4; 2).

e) Vẽ hình ta được A'(2; –2), B'(0; –6), C'(4; –8).

2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi G và H tương ứng là trọng tâm và trực tâm của tam giác, các điểm A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) Tìm phép vị tự F biến A, B, C tương ứng thành A', B', C'.

b) Chứng minh rằng O, G, H thẳng hàng.

c) Tìm ảnh của O qua phép vị tự F.

d) Gọi A", B", C" lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH, BH, CH; A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là giao điểm thứ hai của các tia AH, BH, CH với đường tròn (O); A'_1, B'_1, C'_1 tương ứng là chân các đường cao đi qua A, B, C. Tìm ảnh của A, B, C, A_1, B_1, C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$.

e) Chứng minh chín điểm A', B', C', A", B", C", A'_1, B'_1, C'_1 cùng thuộc một đường tròn (đường tròn này gọi là đường tròn Ơ-le của tam giác ABC).

Hướng dẫn

a) F là phép vị tự tâm G, tỉ số $-\frac{1}{2}$.

b) Để ý rằng O là trực tâm của tam giác A'B'C'.

c) $F(O) = O_1$ là trung điểm của OH.

d) Ảnh của A, B, C, A_1, B_1, C_1 qua phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$ tương ứng là A", B", C", A'_1, B'_1, C'_1.

e) Chứng minh A", B", C", A'_1, B'_1, C'_1 cùng thuộc đường tròn (O_1). Sau đó chứng minh A', B', C' cũng thuộc đường tròn (O_1). Chẳng hạn, chứng minh $O_1A'_1 = O_1A'$.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang với AB là đáy lớn. Gọi M là trung điểm của đoạn AB, E là giao điểm của hai cạnh bên của hình thang ABCD và G là trọng tâm của tam giác ECD.

a) Chứng minh rằng bốn điểm S, E, M, G cùng thuộc một mặt phẳng (α) và mặt phẳng này cắt cả hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) theo cùng một giao tuyến d.

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).

c) Lấy một điểm K trên đoạn SE và gọi $C' = SC \cap KB$, $D' = SD \cap KA$. Chứng minh rằng giao điểm của AC' và BD' thuộc đường thẳng d nói trên.

Giải

a) Gọi N là giao điểm của EM và CD.

Vì M là trung điểm của AB nên N là trung điểm của CD (do ABCD là hình thang)

$\Rightarrow$ EN đi qua G

$\Rightarrow S, E, M, G \in (\alpha) = (SEM)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có $(\alpha) \cap (SAC) = SO$

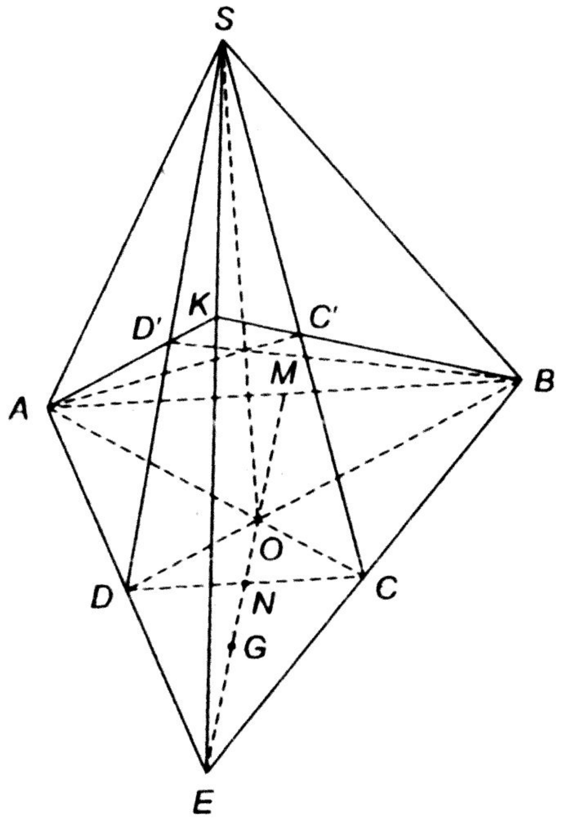
và $(\alpha) \cap (SBD) = SO = d$

b) Ta có $(SAD) \cap (SBC) = SE$.

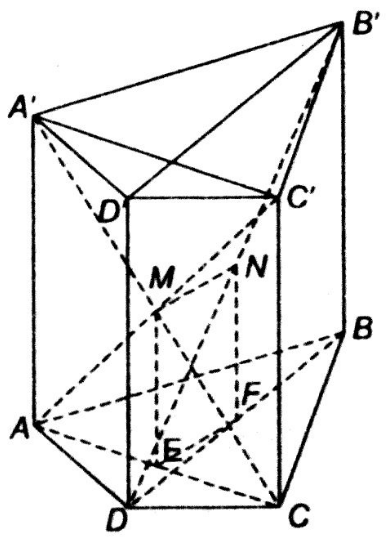
c) Gọi $O' = AC' \cap BD'$.

Ta có $AC' \subset (SAC)$, $BD' \subset (SBD)$

$\Rightarrow O' \in SO = d = (SAC) \cap (SBD)$.



4. Cho hình lăng trụ tứ giác ABCD.A'B'C'D' có E, F, M và N lần lượt là trung điểm của AC, BD, AC' và BD'. Chứng minh MN = EF.



Giải

Tứ giác ACC'A' là hình bình hành nên AC' và A'C cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Tương tự BD' và B'D cắt nhau tại trung điểm N của mỗi đường.

Ta có:

$$\begin{cases} ME // CC' \\ ME = \frac{1}{2}CC' \end{cases}$$ (*ME* là đường trung bình của tam giác ACC').

Tương tự, trong tam giác DBB', ta có:

$$\begin{cases} NF // BB' \\ NF = \frac{1}{2}BB'. \end{cases}$$

Tứ giác MNFE là hình bình hành nên MN = EF.

5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và DD'. Hãy xác định các thiết diện của hình lập phương cắt bởi các mặt phẳng (EFB), (EFC), (EFC') và (EFK) với K là trung điểm của cạnh B'C'.

Giải

Gọi $\mathscr{S}$ là hình lập phương.

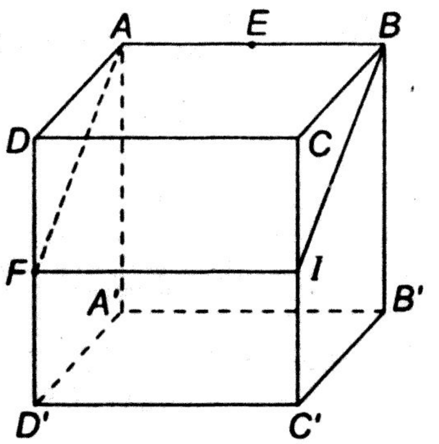
(EFB) $\cap$ $\mathscr{S}$ = ABIF với FI // AB (hình a)

(EFC) $\cap$ $\mathscr{S}$ = ECFH với CF // EH (hình b).

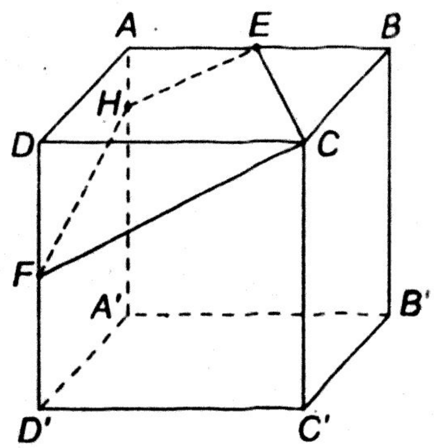
(EFC') $\cap$ $\mathscr{S}$ = EMC'FL với EM // FC' và FL // C'M (hình c)

Gọi E' là hình chiếu vuông góc của E trên mặt phẳng (A'B'C'D').

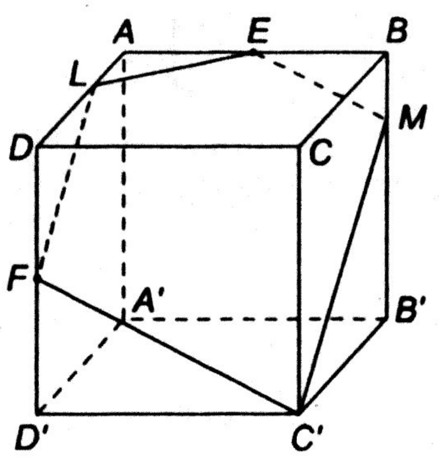
Gọi N = EF $\cap$ E'D', P = NK $\cap$ C'D'. Vẽ ER // KP, EQ // FP, ta có thiết diện là hình lục giác đều ERFPKQ (hình d)



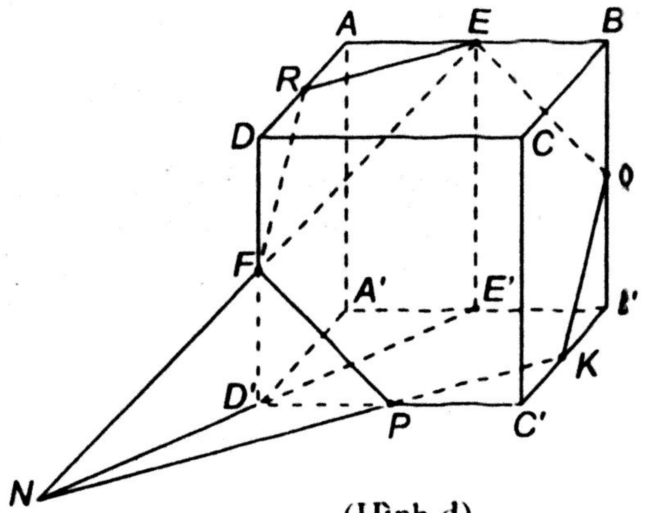
(Hình a)



(Hình b)



(Hình c)



(Hình d)

6. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a.

a) Hãy xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau BD' và B'C.

b) Tính khoảng cách của hai đường thẳng BD' và B'C.

Giải

a) Ta có $\left.\begin{array}{l} B'C \perp BC' \\ B'C \perp D'C' \end{array}\right\} \Rightarrow B'C \perp (D'C'B)$.

Gọi I là tâm hình vuông BCC'B'.

Trong mặt phẳng (BC'D') vẽ IK $\perp$ BD' tại K.

Ta có IK là đường vuông góc chung của BD' và B'C.

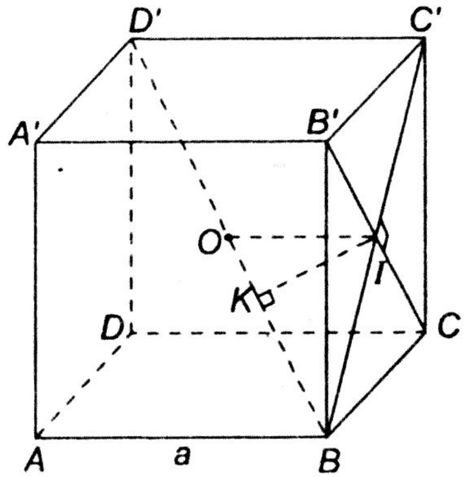
b) Gọi O là trung điểm của BD'.

Vì ΔIOB vuông tại I nên :

$$\frac{1}{KI^2} = \frac{1}{IO^2} + \frac{1}{IB^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{4}{a^2} + \frac{2}{a^2} = \frac{6}{a^2}$$

$$\Rightarrow KI = \frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



7. Cho hình thang ABCD vuông tại A và B, có AD = 2a, AB = BC = a. Trên tia Ax vuông góc với mặt phẳng (ABCD) lấy một điểm S. Gọi C', D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SC và SD. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$.

b) AD', AC' và AB cùng nằm trên một mặt phẳng.

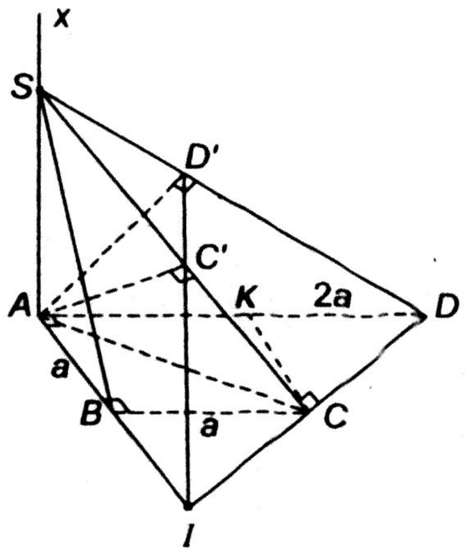
c) Chứng minh rằng đường thẳng C'D' luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S di động trên tia Ax.

Giải

a) Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \widehat{SBC} = 90^\circ$.

Gọi K là trung điểm của AD ta có $CK = AB = \frac{1}{2}AD$ nên tam giác ACD vuông tại C.



Ta có $\begin{cases} CD \perp AC \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAC)$

$$\Rightarrow CD \perp SC \Rightarrow \widehat{SCD} = 90^o$$

b) Trong mặt phẳng (SAC) vẽ $AC' \perp SC$ và trong mặt phẳng (SAD) vẽ $AD' \perp SD$.

Ta có $AC' \perp CD$ (vì $CD \perp (SAC)$)

và $AC' \perp SC$ nên suy ra $AC' \perp (SCD)$

$$\Rightarrow AC' \perp SD.$$

Ta lại có $AB \perp AD$ và $AB \perp SA$

nên $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp SD$.

Ba đường thẳng AD', AC' và AB cùng đi qua điểm A và vuông góc với SD nên cùng nằm trong mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SD.

c) Ta có C'D' là giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SCD). Do đó khi S di động trên tia Ax thì C'D' luôn luôn đi qua điểm I cố định là giao điểm của AB và CD.

$$(AB \subset (\alpha), CD \subset (SCD) \Rightarrow I \in (\alpha) \cap (SCD) = C'D').$$

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội

Điện thoại : (04) 3971 4896 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

***Giám đốc* : PHÙNG QUỐC BẢO**

***Tổng biên tập* : PHẠM THỊ TRÂM**

Biên tập : Ngọc Lâm

Trình bày : Diệu Tâm

Bìa : Công ty Sách Hoa Hồng

Đối tác liên kết xuất bản : Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 11

Mã số : 1L-164ĐH2010

In 5000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Công ty TNHH In Song Nguyên.

Số xuất bản: 290-2010/CXB/16-50/ĐHQGHN, ngày 01/4/2010.

Quyết định xuất bản số : 164LK-TN/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.